

Od rekurzije do fraktala

vizualizacija matematičkih struktura programiranjem

Radionica na računalima
Python Turtle • Trinket online editor

Davorka Medvedović • Ivana Šćuric
11. kongres nastavnika matematike Republike Hrvatske
Sekcija za informatiku



Matematika je svuda oko nas

U prirodi često opažamo ponavljanje, simetriju, grananje, spirale i samosličnost.



grananje stabala



paprat



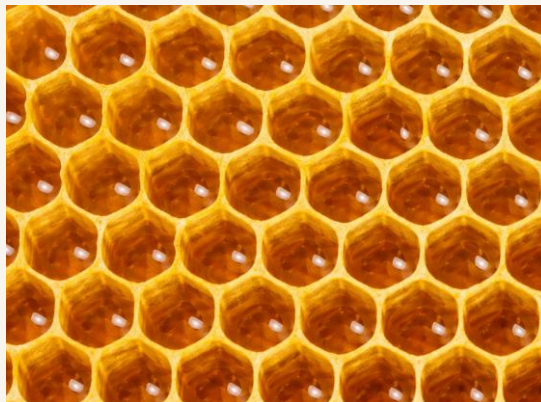
romanesco



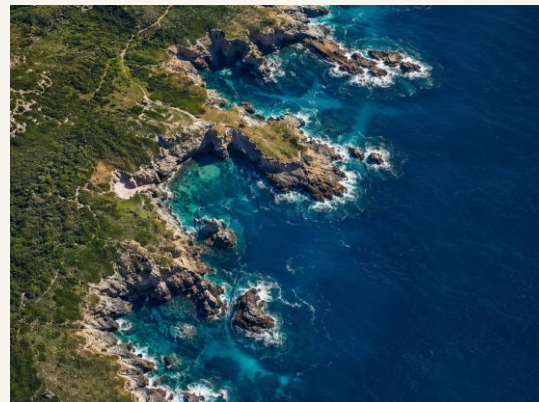
pahuljice



puževa kućica



saće



morska obala



latice cvijeta

Nisu svi uzorci u prirodi fraktali

Važno je precizno razlikovati fraktalnu ideju od opće pravilnosti i simetrije.

Dobri primjeri za fraktalnu ideju

- grananje stabla
- snježna pahuljica
- romanesco
- morska obala
- paprat

Dobri uzorci, ali ne nužno fraktali

- saće
- puževa kućica
- raspored latica cvijeta

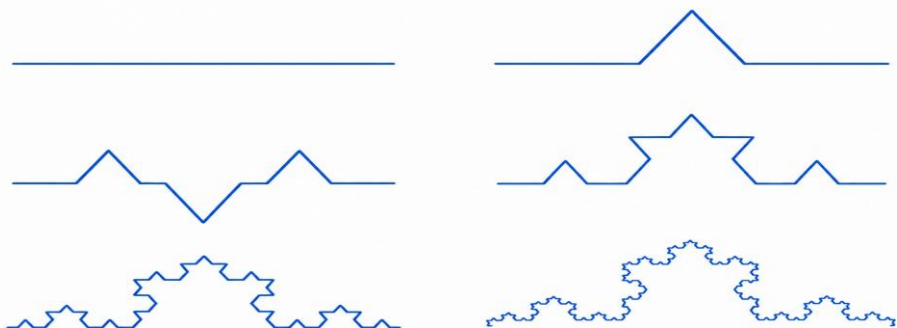
Fraktal = ponavljanje sličnog obrasca na više razina

Mrežni simulatori fraktala

Brza vizualizacija prije programiranja: promijeni parametre i odmah promatraj rezultat.

Primjer 1

Kochova krivulja / pahuljica

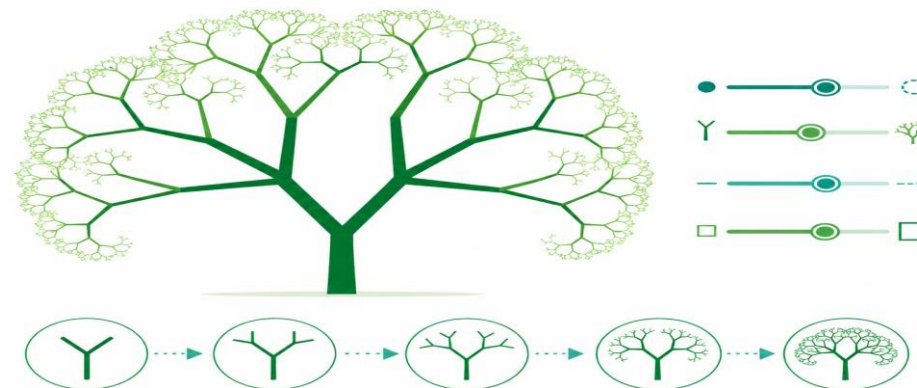


mijenja se broj iteracija
uspoređuje se linija, pahuljica i antisnowflake
dobro za pitanje: kada rub postaje „pregust“?

onlinetools.com/fractal/draw-koch-fractal

Primjer 2

Visnos — fraktalno stablo



mijenjaju se grane, kutovi i iteracije
duljina grane se postupno množi faktorom
dobro za prijelaz: pravilo → grananje → fraktal

visnos.com/demos/interactive-fractal-tree

Zadatak: promijenite 2–3 parametra.

Radimo u mrežnom okruženju Trinket Turtle

Bez lokalne instalacije Pythona — dovoljno je računalo, preglednik i internetska veza.

<https://trinket.io/turtle>

Otvorite poveznicu, izbrišite početni primjer i prepisite kod sa slajda.

- nije potrebna instalacija
- primjeri koriste Python turtle grafiku
- za rekurziju koristimo male dubine kako bi se crteži brzo prikazali

Što je rekurzija?

Tri uvjeta za smislen rekurzivni program.

- funkcija poziva samu sebe
- svaki novi korak radi nešto slično
- mora postojati baza, odnosno uvjet za zaustavljanje

**ponavljanje + promjena +
baza**

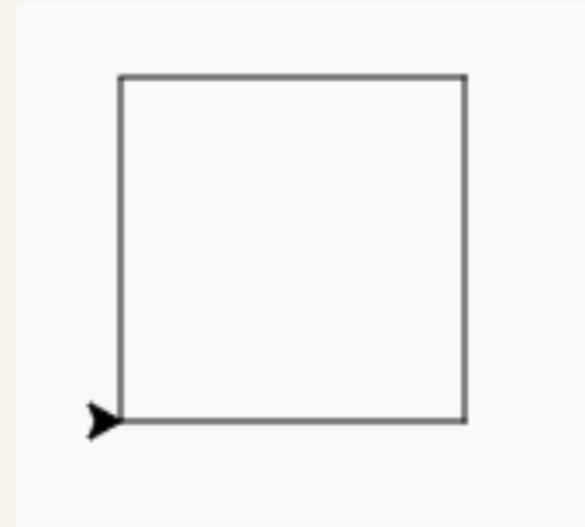
Primjeri za učenike: kutije u kutiji,
ogledalo u ogledalu, grananje
stabla.

Prvi korak: kvadrat

Jedan lik, jedno pravilo: geometrija se pretače u naredbe.

```
from turtle import *  
  
speed(0)  
hideturtle()  
  
def kvadrat(a):  
    for i in range(4):  
        fd(a)  
        lt(90)  
  
kvadrat(100)
```

- 4 stranice
- kut 90°
- pravilni oblik
- početak modela



**Što možemo promijeniti da ne
dobijemo samo jedan
kvadrat?**

Kad se pravilo ponavlja: rekurzivni kvadrat

Svaki novi poziv funkcije crta isti oblik, ali s manjom stranicom.

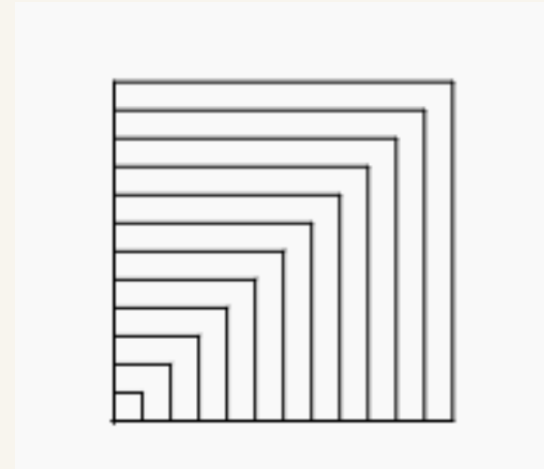
```
from turtle import *

speed(0)
hideturtle()
def kvadrat(a):
    for i in range(4):
        fd(a)
        lt(90)

def kvadrat_rek(a):
    kvadrat(a)
    if a < 10:
        return
    kvadrat_rek(a - 10)

kvadrat_rek(120)
```

- baza: $a < 10$
- svaki novi kvadrat je manji
- isti oblik, nova razina
- matematika: promjena parametra



Pitanje: što bi se dogodilo da nema uvjeta za zaustavljanje?

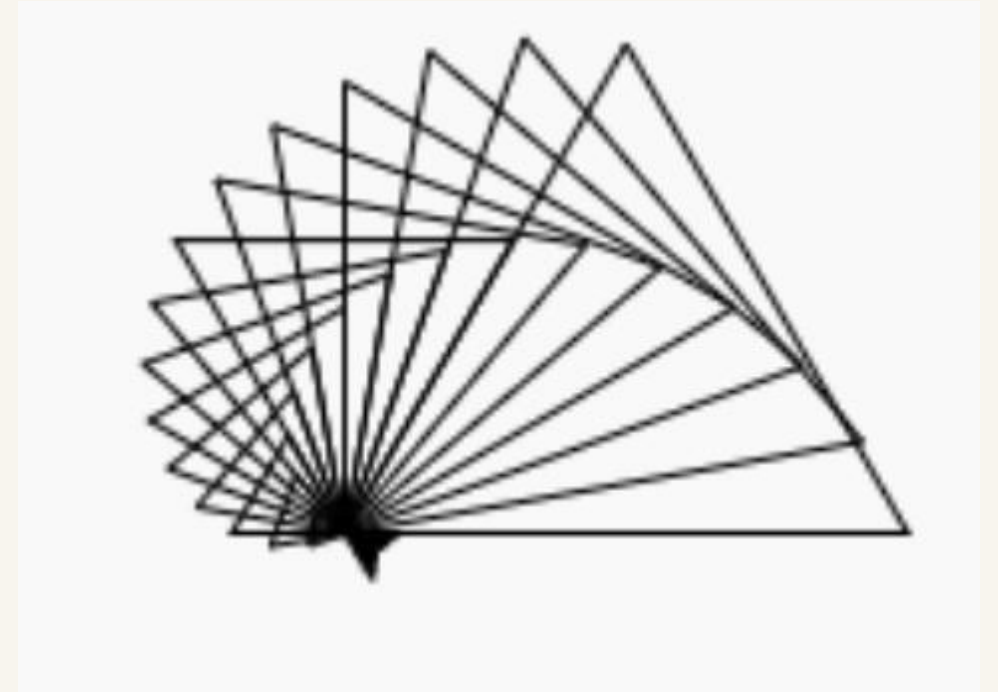
Trokut i puževa kućica

Mala promjena u pravilu može stvoriti potpuno novi uzorak.

Rekurzivni trokut

```
from turtle import*
speed(0)
def trokut_rek(a):
    if a < 10:
        return
    for i in range(3):
        fd(a)
        lt(120)
    lt(10)
    trokut_rek(a-10)
trokut_rek(150)
```

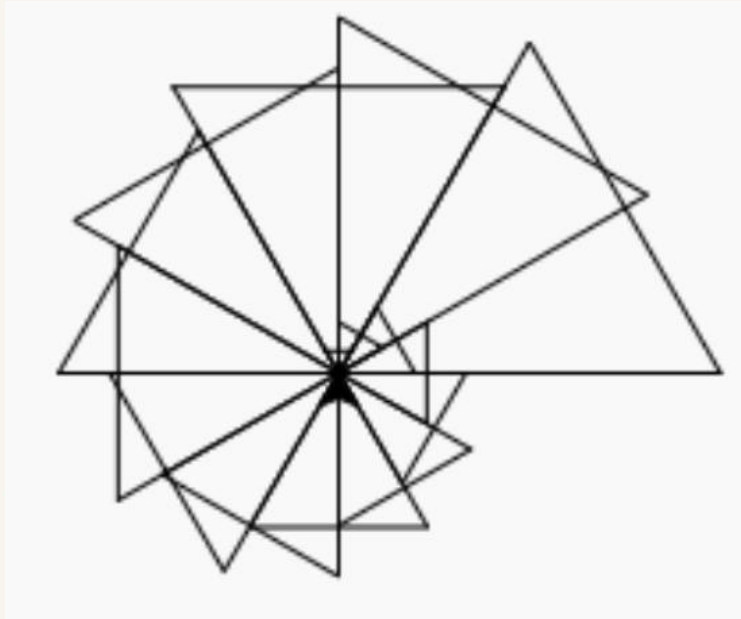
def



Dodajemo samo jedno zakretanje prije novog poziva funkcije.

Trokut i puževa kućica

def



Puževa kućica

```
from turtle import*
speed(0)
def puz(a):
    if a<10:
        return
    for i in range(3):
        fd(a)
        lt(120)
    lt(30)
    puz(a - 10)
puz(150)
```

Izazov 1

Promijenite program tako da crta novi pravilni mnogokut.

Zadatak

- peterokut
- šesterokut
- osmerokut

Vrijeme: 5 minuta

Koji kut treba promijeniti?

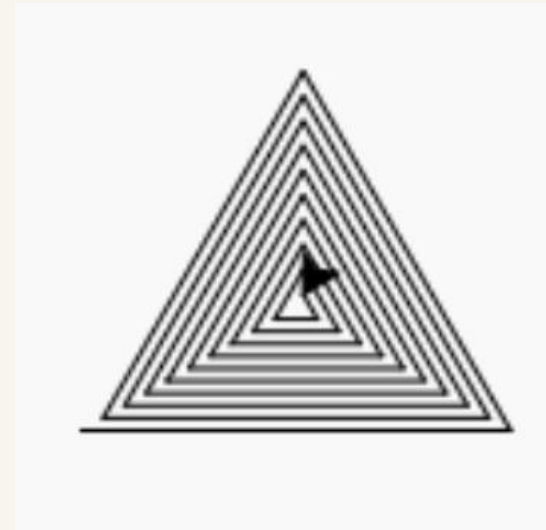
Podsjetnik: $\text{kut} = 360 / \text{broj stranica}$

Spirale pravilnih mnogokuta

Broj stranica, kut zakreta i korak smanjivanja stvaraju različite uzorke.

```
from turtle import*
def spirala_mnogokuta(n, a, k):
    if a < 10:
        return
    fd(a)
    lt(360 / n)
    spirala_mnogokuta(n, a - k, k)
spirala_mnogokuta(3, 80, 2)
```

- broj stranica mijenja oblik
- kut mijenja smjer
- korak k mijenja gustoću spirale



Matematičke veze: kutovi • nizovi duljina • pravilnost • transformacije

Izazov 2 — spirala po izboru

Napravite spiralu pravilnog mnogokuta i promatrajte kako se mijenja izgled.

- spirala peterokuta
- spirala šesterokuta
- spirala sedmerokuta

Vrijeme: 7 minuta

Kako broj stranica mijenja izgled spirale?

Dodatno: promijenite korak k i usporedite gustoću uzorka.

Stablo kao prirodan most prema fraktalima

Od rekurzije kao postupka prema samosličnom rezultatu.



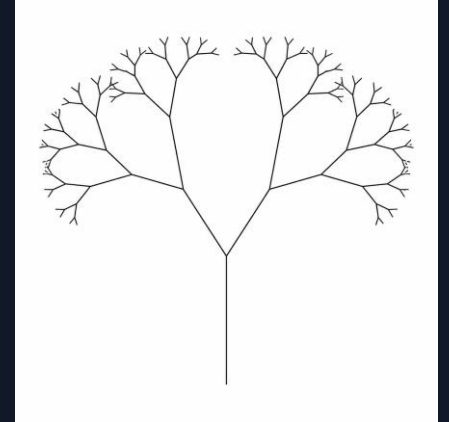
grana → manje grane → još manje grane

```
from turtle import *

speed(0)
hideturtle()
lt(90)

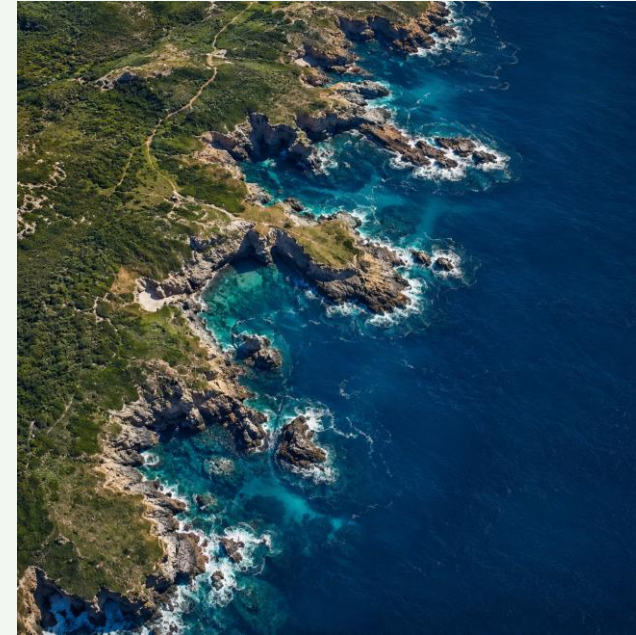
def stablo(a, n):
    if n == 0:
        return
    fd(a)
    lt(30)
    stablo(a * 0.7, n - 1)
    rt(60)
    stablo(a * 0.7, n - 1)
    lt(30)
    bk(a)

stablo(100, 6)
```



Što je fraktal?

Ponavljanje sličnog obrasca na više razina.



- mali dio podsjeća na cjelinu
- nastaje ponavljanjem istog pravila
- često pokazuje samosličnost

Rekurzija često vodi prema fraktalu

Kochova pahuljica — klasični fraktal

Jedna dužina postaje četiri manje: jednostavno pravilo, složen rezultat.

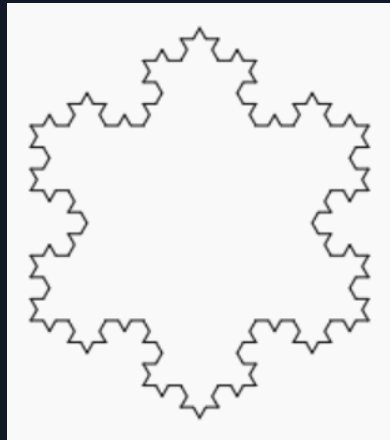
```
from turtle import *

speed(0)
hideturtle()

def koch(a, n):
    if n == 0:
        fd(a)
    else:
        koch(a/3, n-1)
        lt(60)
        koch(a/3, n-1)
        rt(120)
        koch(a/3, n-1)
        lt(60)
        koch(a/3, n-1)

def pahuljica(a, n):
    for i in range(3):
        koch(a, n)
        rt(120)

pahuljica(180, 3)
```



- početnu dužinu dijelimo na tri dijela
- srednji dio zamjenjujemo vrhom
- pravilo ponavljamo na svakoj novoj dužini
- rezultat postaje fraktalni rub



Izazov 3 — mala promjena, veliki učinak

Istražite parametre u gotovom programu za Kochovu pahuljicu.

Promijenite:

- dubinu n
- početnu duljinu a

Razmislite:

- što se mijenja?
- kada crtež postaje pregust?
- što je primjereno za učenike 8. razreda?

Vrijeme: 5 minuta

Zaključak: veći n daje složeniji rub; za učenike je najčešće dovoljno $n = 2$ ili $n = 3$.

Primjena u nastavi?

Primjeri se mogu zadavati slojevito, prema predznanju učenika.

Osnovna razina

- kvadrat
- trokut
- pravilni mnogokuti

Srednja razina

- spirale
- puževa kućica
- promjena parametara

Naprednija razina

- rekurzivno stablo
- Kochova pahuljica
- samosličnost i fraktali

Učenici ne uče samo sintaksu — kroz programiranje promatraju matematiku.

**Rekurzija nam pokazuje kako se pravilo ponavlja.
Fraktali nam pokazuju što iz tog ponavljanja nastaje.**

**Matematika daje pravilo.
Programiranje daje oblik.
Priroda daje smisao.**

Hvala na sudjelovanju!

Davorka Medvedović, OŠ Rovišće, davorka.medvedovic@skole.hr
Ivana Šćuric, OŠ Ivana Viteza Trnskog, Nova Rača, ivana.scuric1@skole.hr