MATEMATIČKI KLOKAN 2026.

RJEŠENJA ZADATAKA

S

Pitanja za 3 boda:

1. [Gruzija] Duljine stranica trokuta prirodni su brojevi. Jedna je stranica duljine 9, a druga 1. Kolika je duljina treće stranice?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

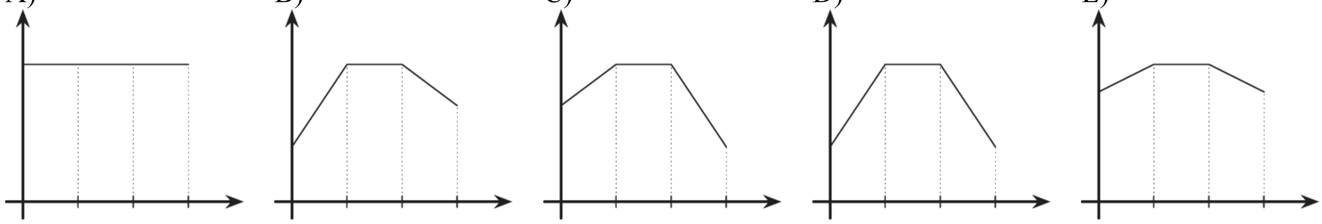
Rješenje: C
Da bi tri dužine mogle tvoriti trokut, za njihove duljine mora vrijediti: $a+b>c, a+c>b, b+c>a$.
U našem slučaju ($a=1$, $b=9$) mora vrijediti $c<10$ i $c>8$, pa je jedino moguće rješenje $c=9$.

2. [Malezija] Tijekom 30-minutnog trčanja Milin pametni sat daje sljedeće izvješće:

1. Prvih 10 minuta broj otkucaja srca svake se minute povećavao za 4 bpm (beats per minute).
2. Sljedećih 10 minuta broj otkucaja srca bio je konstantan.
3. Zadnjih 10 minuta broj otkucaja srca svake se minute smanjivao za 2 bpm (beats per minute).

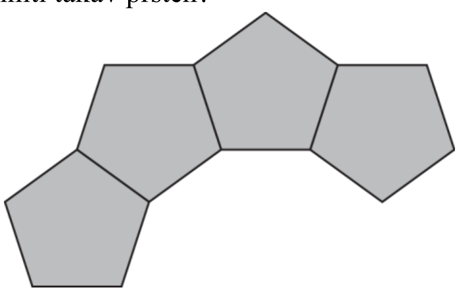
Koji bi od danih grafova mogao biti prikaz Milinog broja otkucaja srca tijekom trčanja?

A) B) C) D) E)



Rješenje: B
Broj otkucaja srca prvo raste, pa stagnira, pa pada. Rast je strmiji od pada.

3. [Vijetnam] Pločice oblika pravilnog peterokuta slažemo stranu uz stranu, kao na slici. Na taj način želimo oblikovati prsten. Koliko će pločica činiti takav prsten?



A) 10 B) 11 C) 12 D) 14 E) 15

Rješenje: A
Unutarnji je kut pravilnog peterokuta $\frac{(5-2)\cdot 180°}{5}=108°$. Unutarnji je kut poligona koji nastaje ovakvim slaganjem (sredina prstena) $360°-2\cdot 108°=144°$.
Sada iz jednakosti $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}=144°$ dobivamo $n=10$.

4. [Švicarska] Koji je najveći broj koji je moguće dobiti zamijenimo li četiri pravokutnika u izrazu $\left(\square+\square\right)^{\left(\square-\square\right)}$ četirima brojevima 2, 0, 2 i 6?

A) 2^4 B) 2^6 C) 2^8 D) 2^{10} E) 2^{12}

Rješenje: E

$\left(\boxed{2}+\boxed{2}\right)^{\left(\boxed{6}-\boxed{0}\right)} = 4^6 = 2^{12}$.

5. [Indonezija] U hotelu je devet soba. One su trokrevetne ili četverokrevetne. U hotel dolazi 30 ljudi koji će ga popuniti do zadnjega kreveta. Koliko je četverokrevetnih soba u hotelu?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: C

Da su sve sobe trokrevetne, hotel bi mogao smjestiti $9 \cdot 3 = 27$ ljudi. Preostaje $30 - 27 = 3$ ljudi pa tri sobe moraju biti četverokrevetne.

6. [Katalonija] Koliko ima troznamenkastih brojeva $\overline{abc}$ za koje vrijedi $a = \left(\frac{b}{c}\right)^2$?

A) 4 B) 8 C) 9 D) 10 E) 16

Rješenje: E

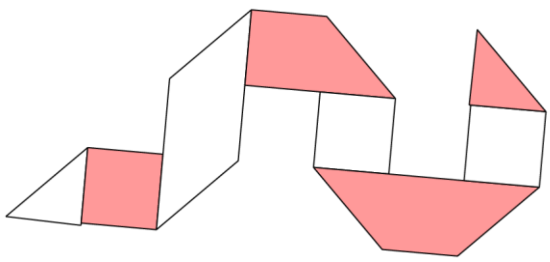
Znamenka a potpuni je kvadrat pa mora biti 1, 4 ili 9. Postoji 16 brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

Ako je $a = 1$, to može biti $\left(\frac{1}{1}\right)^2, \left(\frac{2}{2}\right)^2, \ldots, \left(\frac{9}{9}\right)^2$: 111, 122, 133, 144, 155, 166, 177, 188, 199.

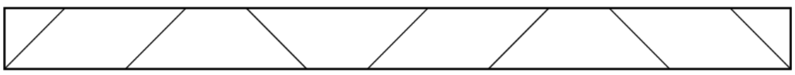
Ako je $a = 4$, to može biti $\left(\frac{2}{1}\right)^2, \left(\frac{4}{2}\right)^2, \left(\frac{6}{3}\right)^2, \left(\frac{8}{4}\right)^2$: 421, 442, 463, 484.

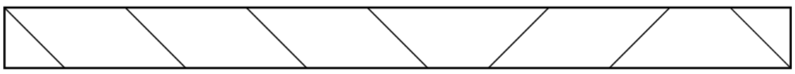
Ako je $a = 9$, to može biti $\left(\frac{3}{1}\right)^2, \left(\frac{6}{2}\right)^2, \left(\frac{9}{3}\right)^2$: 931, 962, 993.

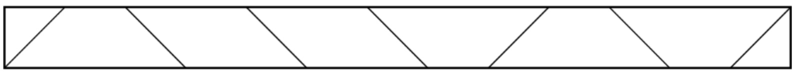
7. [Poljska] Miro ima papirnatu traku koja je s jedne strane bijela, a s druge u boji. Presavio ju je sedam puta, kao na slici.

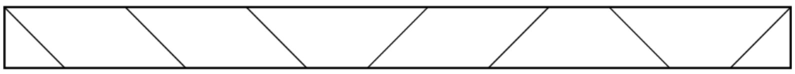


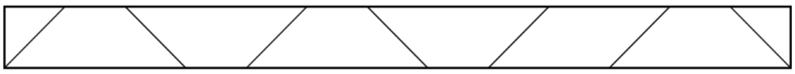
Kako bijela strana trake izgleda nakon razmotavanja?

A) 

B) 

C) 

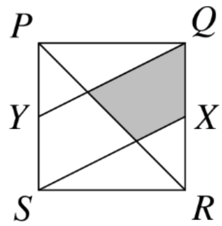
D) 

E) 

Rješenje: D

Likovi koji su nastali presavijanjem redom su: trokut, paralelogram, paralelogram, trapez, paralelogram, trapez, trapez, trokut. To vidimo samo na slici D.

8. [Ujedinjeno Kraljevstvo] Na slici je prikazan kvadrat $SRQP$. Točka X polovište je stranice $\overline{RQ}$, a točka Y polovište je stranice $\overline{PS}$. Koji je dio kvadrata osjenčan?



A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

Rješenje: D

Stranica $\overline{YS}$ paralelograma $SXQY$ dva je puta manja od stranice kvadrata, a visina na tu stranicu jednaka je duljini stranice kvadrata. Zato je površina paralelograma $SXQY$ dva puta manja od površine kvadrata $SRQP$. Dijagonala $\overline{PR}$ kvadrata raspolavlja paralelogram. Osjenčani dio kvadrata je dakle $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Pitanja za 4 boda:

9. [Bjelorusija] Broj $\underbrace{333 \ldots 33}_{2026}$ podijeljen je brojem 33. Koliko iznosi zbroj znamenaka kvocijenta?

A) 1111 B) 2025 C) 2026 D) 3039 E) Ništa od navedenog.

Rješenje: E

$\underbrace{333 \ldots 33}_{2026} : 33 = \underbrace{10101 \ldots 01}_{2025}$. Zbroj znamenaka kvocijenata je 1013.

10. [Australija] Ana i Danijel bacaju dvije igraće kocke i zapisuju umnožak dobivenih brojeva.

1. Ana dobiva bod ako je umnožak djeljiv brojem 4.
2. Danijel dobiva bod ako je umnožak djeljiv brojem 6.

Koja je vjerojatnost da i Ana i Danijel dobiju po bod u istome bacanju?

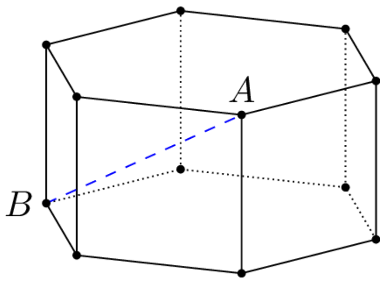
A) $\frac{1}{18}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{5}{36}$ D) $\frac{7}{36}$ E) $\frac{2}{9}$

Rješenje: D

Da bi i Ana i Danijel dobili bod u istome bacanju, umnožak mora biti djeljiv brojem 12. Mogući rezultati su 12, 24 i 36. To će se dogoditi u 7 slučajeva: $(2,6), (6,2), (4,6), (6,4), (3,4), (4,3), (6,6)$.

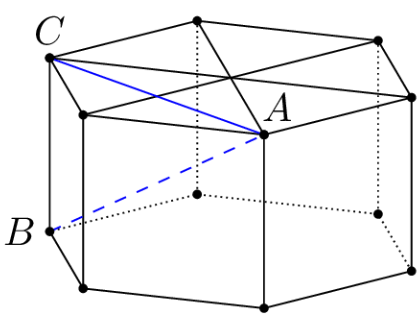
Postoji $6 \cdot 6 = 36$ elementarnih događaja pri bacanju dviju igraćih kocaka, a povoljnih je njih 7 pa je tražena vjerojatnost $\frac{7}{36}$.

11. [Australija] Strane šesterostrane prizme na slici dva su pravilna šesterokuta i šest kvadrata. Svi su bridovi duljine 1. Koja je duljina dužine $\overline{AB}$ istaknute na slici?



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{4}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

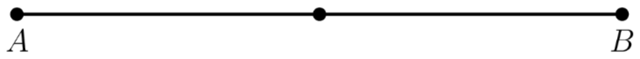
Rješenje: C



Neka je C vrh prizme iznad vrha B, kao na slici. Tada je duljina dužine $\overline{AC}$ jednaka dvostrukoj duljini visine jednakostraničnog trokuta stranice duljine 1, tj. $|\overline{AC}| = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Slijedi da je $|\overline{AB}| = \sqrt{|\overline{BC}|^2 + |\overline{AC}|^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

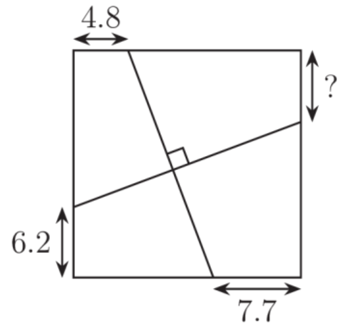
12. [Australija] Na dužinu $\overline{AB}$ nasumično su smještene točke P i Q, nijedna nije u polovištu.
Koja je vjerojatnost da dužina $\overline{PQ}$ sadrži polovište dužine $\overline{AB}$?



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

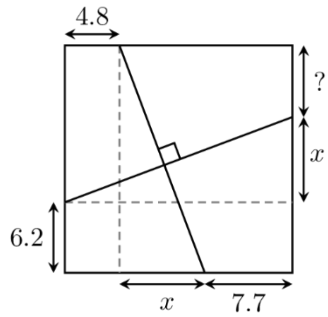
Rješenje: C
Pretpostavimo da je točka P već smještena nasumično na dužinu $\overline{AB}$. Dužina $\overline{PQ}$ sadržavat će polovište dužine $\overline{AB}$ ako točka Q nije na istoj polovici dužine kao točka P. Vjerojatnost da se to dogodi je $\frac{1}{2}$.

13. [Njemačka] Na slici je prikazan kvadrat i dvije okomite dužine unutar njega, te su dane duljine triju dužina. Koja je duljina dužine označene upitnikom?

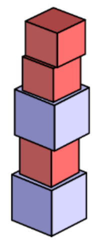


A) 5.6 B) 5.9 C) 6.1 D) 6.3 E) 6.6

Rješenje: D
Povučemo li iscrtkane linije kao na slici, dobit ćemo dva sukladna pravokutna trokuta – svakom je od njih duljina jedne katete jednaka duljini stranice kvadrata, a kutovi su im jednaki jer se radi o kutovima s okomitim kracima. Onda su im i duljine drugih kateta jednake, označimo ih s x. Sada vidimo da mora vrijediti $4.8 + x + 7.7 = 6.2 + x+$? jer su stranice kvadrata jednake duljine.
Iz te jednakosti slijedi da je tražena duljina 6.3.



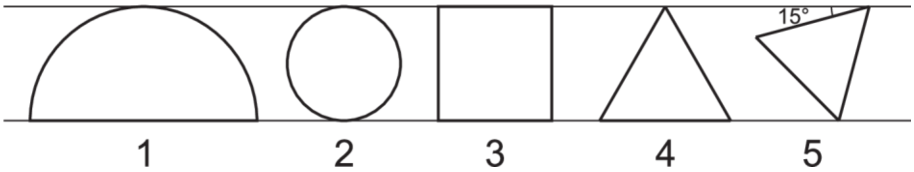
14. [Finska] Od kockica želimo napraviti toranj. Imamo neograničene količine dviju vrsta kockica – jedne su visoke 4 cm, a druge 5 cm. Koja je najveća visina koju **ne možemo** postići slaganjem ovih kockica?



A) 7 cm B) 11 cm C) 17 cm D) 37 cm E) 101 cm

Rješenje: B
Očito je da možemo izgraditi toranj visine koja je višekratnik broja 4. Brojeve između možemo dobiti skidanjem jedne, dviju ili triju kockica visine 4 i dodajući isti broj kockica visine 5. To možemo činiti ako su barem 3 kockice visine 4 već na tornju pa je moguće postići sve visine veće ili jednake $3 \cdot 4 = 12$.
Toranj visine 11 ne možemo izgraditi od kockica visine 4 cm i 5 cm.

15. [Bjelorusija] Pet je likova smješteno između dvaju paralelnih pravaca, kao na slici.



Lik 1 je polukrug, lik 2 je krug, lik 3 je kvadrat, likovi 4 i 5 su jednakostranični trokuti. Označimo površine tih likova P_1, P_2, P_3, P_4 i P_5. Koja je od danih relacija istinita?

A) $P_1 > P_2 > P_3 > P_4 > P_5$

B) $P_1 > P_4 > P_3 > P_2 > P_5$

C) $P_1 > P_3 > P_2 > P_4 > P_5$

D) $P_1 > P_3 > P_4 > P_2 > P_5$

E) $P_1 > P_3 > P_2 > P_5 > P_4$

Rješenje: C

Označimo udaljenost između danih paralelnih pravaca s d.

Tada su površine: $P_1 = \frac{\pi}{2}d^2 \approx 1.57d^2,\ P_2 = \frac{\pi}{4}d^2 \approx 0.79d^2,\ P_3 = d^2,\ P_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}d^2 \approx 0.58d^2$.

Lako zaključujemo da je $P_1 > P_3 > P_2 > P_4$.

Sa slike možemo zaključiti da je $P_5 < P_4$, pa imamo konačno $P_1 > P_3 > P_2 > P_4 > P_5$.

16. [Ukrajina] Oleg je bacio 100 igraćih kocaka i pomnožio sve brojeve koji su pali. Dobio je umnožak 6^{70}. Koliko je najmanje šestica moglo pasti?

A) 10 B) 12 C) 24 D) 30 E) 35

Rješenje: A

Među danim odgovorima nađimo najmanji koji zadovoljava uvjete zadatka. To je odgovor A jer 6^{70} možemo dobiti ako šestica padne 10 puta, trojka 60 puta i četvorka 30 puta: $6^{70} = 6^{10} \cdot 3^{60} \cdot 4^{30}$.

Pitanja za 5 bodova:

17. [Švicarska] Zbroj petnaest uzastopnih prirodnih brojeva jednak je zbroju sljedećih devet uzastopnih prirodnih brojeva. Koji je najmanji od ta 24 broja?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Rješenje: B

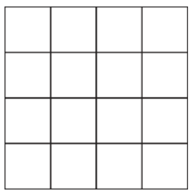
Označimo najmanji od ta 24 broja s n.

Zbroj petnaest uzastopnih prirodnih brojeva, počevši od n, jest $\frac{15}{2}\big(n + (n+14)\big)$.

Zbroj sljedećih devet uzastopnih prirodnih brojeva je $\frac{9}{2}\big((n+15) + (n+23)\big)$.

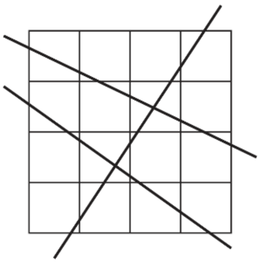
Izjednačavanjem imamo $15(n+7) = 9(n+19)$, iz čega slijedi $n = 11$.

18. [Iran] Amir ima mrežu kvadrata 4×4, kao na slici. Ravnim rezačem želi izrezati tu mrežu tako da nijedan kvadrat ne ostane netaknut. Koliko najmanje rezova mora napraviti?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Rješenje: B



Jednim rezom moguće je zarezati najviše 7 kvadrata, pa su potrebna najmanje tri reza. Na slici vidimo da je moguće rješenje s tri reza.

19. [Kamerun] Za dva realna broja a i b vrijedi jednakost $9^a = 11^b = 9801$. Koliko iznosi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 1 D) 2 E) 3

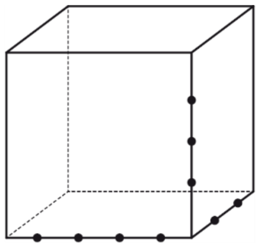
Rješenje: A

Iz $9^a = 9801$ imamo $9 = 9801^{\frac{1}{a}}$. Iz $11^b = 9801$ imamo $11 = 9801^{\frac{1}{b}}$.

Nakon množenja imamo $99 = 9801^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Kako je $9801 = 99^2$, imamo $1 = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, odnosno $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$.

20. [Poljska] Na bridovima kocke izabrano je devet točaka, kao na slici. Koliko ima trostranih piramida kojima su vrhovi iz tog skupa točaka?



A) 24 B) 36 C) 48 D) 60 E) 72

Rješenje: E

Dobit ćemo trostranu piramidu ako kao njezine vrhove s jednog brida odaberemo dva, a s ostalih bridova po jednu točku: $\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{2} = 6 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1 = 72$.

21. [Hrvatska] Pred nama je $2n$ vrata. Svaka vrata otključava samo jedan ključ. Svaki od n ključeva koje imamo otključava dvoja vrata, ali se ne zna koja. Koliko je najviše pokušaja potrebno da bismo odredili koji ključevi otvaraju koja vrata?

A) $2n$ B) $2n^2$ C) $n^2 + n$ D) $n^2 - 1$ E) $n^2 + n - 2$

Rješenje: D

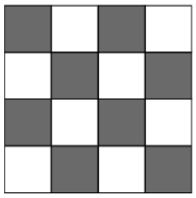
Moramo isprobavati jedan po jedan ključ. Razmotrimo najgori mogući scenarij.

- Prvi ključ otključava jedna od $2n - 2$ vrata koja pokušavamo otvoriti, ali ne otključava $(2n - 1)$. Budući da ne otključava pretposljednja vrata, znamo da će otključati posljednja vrata. Trebalo nam je $2n - 1$ pokušaja da odredimo koja vrata otključava prvi ključ.
- Sada imamo $2n - 2$ vrata koja bi mogao otključati drugi ključ. Najgori mogući scenarij isti je kao i za prvi ključ, samo imamo dvoja vrata manje. Drugi će ključ otključati jedna od $2n - 4$ vrata koja pokušamo otključati, ali ne i $(2n - 3)$. Budući da ne otključava pretposljednja vrata, znamo da će otključati posljednja vrata. Trebalo nam je $2n - 3$ pokušaja da odredimo koja vrata otključava drugi ključ.
- Razmišljajući na isti način znamo da će nam trebati najviše $2n - 5$ pokušaja da odredimo koja vrata otključava treći ključ.
- …
- Za $(n - 1)$ ključ trebamo najviše 3 pokušaja.
- Znamo da će zadnji ključ otključati posljednja dvoja vrata.

Zbrojimo li sve pokušaje, dobivamo (suma aritmetičkog niza):

$$(2n - 1) + (2n - 3) + (2n - 5) + 5 + 3 = \frac{(n - 1)(2n + 2)}{2} = n^2 - 1$$

22. [Meksiko] Na 4×4 ploči, obojenoj kao na slici, želimo napraviti da sva polja budu bijela ponavljajući sljedeći potez: izaberi 4 polja koja čine 2×2 kvadrat i promijeni boje u tim poljima (crno u bijelo, a bijelo u crno). Koliko najmanje puta treba ponoviti taj potez?

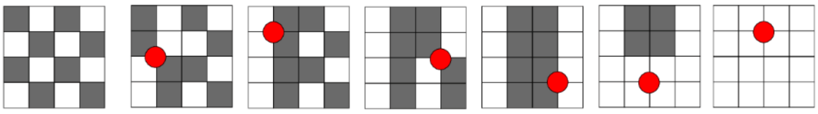


A) 4 B) 6 C) 8 D) 16 E) To nije moguće.

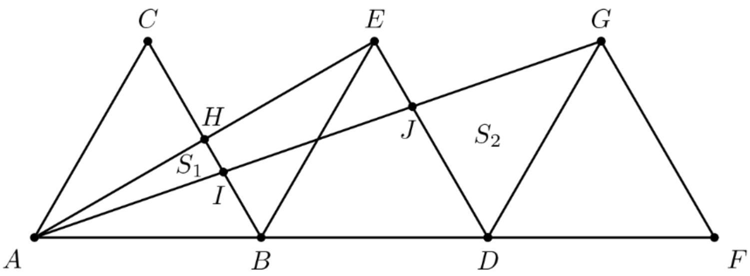
Rješenje: B

Potrebno je najmanje 6 poteza. Svako crno polje mora biti odabrano neparan broj puta. Dva su crna polja u kutovima, a da bismo njih promijenili u bijelo, za svoj potez moramo odabrati 2×2 kvadrate upravo u tim kutovima. Ako ih odaberemo kao prvi potez, imamo situaciju kao na slici lijevo. Pogledamo li sada crna polja označena križićem na slici desno, vidimo da ne postoji 2×2 kvadrat koji sadrži dva od njih. Dakle, potrebna su nam još najmanje 4 poteza.

Sva bijela polja možemo napraviti u 6 poteza. Evo primjera:



23. [Kina] Tri sukladna jednakostranična trokuta nacrtana su na dužini $\overline{AF}$. Označimo površinu trokuta AIH sa S_1 i površinu trokuta JDG sa S_2. Odredi omjer $S_1 : S_2$.



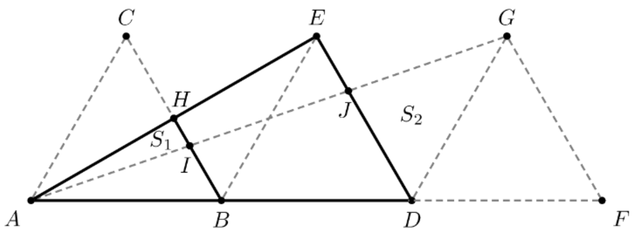
A) $1 : 3$ B) $1 : 4$ C) $1 : 5$ D) $2 : 3$ E) $3 : 5$

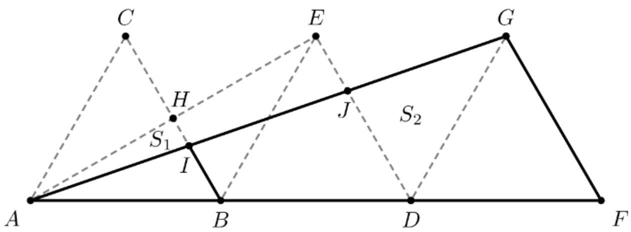
Rješenje: B

Uočimo da su trokuti AIC i GJD sukladni – oba imaju jednu stranicu dujine a, a svi su im kutovi jednaki jer se radi o kutovima s paralelnim kracima. Dakle, trokut AIC također ima površinu S_2. Omjer površina trokuta AIH i AIC jednak je omjeru duljina njihovih stranica $\overline{IH}$ i $\overline{IC}$ (visine na te stranice u oba su trokuta jednake).

Označimo duljinu stranice danih jednakostraničnih trokuta s a.

Iz sličnosti trokuta ADE i ABH (slika lijevo) znamo da je $|BH| = \frac{1}{2}a$.





Iz sličnosti trokuta AFG i ABI (slika desno) znamo da je $|BI| = \frac{1}{3}a$.

Onda je $|IC| = a - \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a$ te $|IH| = \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}a = \frac{1}{6}a$.

Omjer $S_1 : S_2 = |IH| : |IC| = \frac{1}{6} : \frac{2}{3} = 1 : 4$.

24. [Australija] Za funkciju f i za svaki realan broj x vrijedi

$$f(x+10) = f(x)$$

i

$$f(6-x) = -f(x).$$

Ako je $f(27) = 9$, koliko iznosi $f(9) + f(13)$?

A) -27 B) -9 C) -3 D) 3 E) 9

Rješenje: B

Ako je $f(27) = 9$, onda je i $9 = f(17) = f(7) = f(-3) = \cdots$

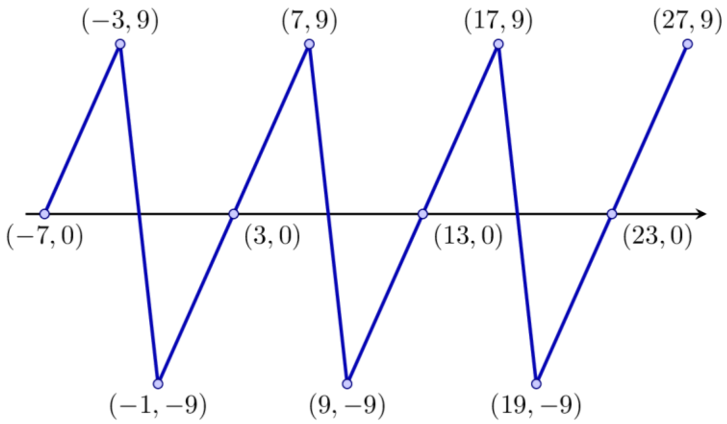
Iz drugog svojstva imamo $f(9) = f\big(6-(-3)\big) = -f(-3) = -9$.

Također iz drugog svojstva imamo $f(3) = f(6-3) = -f(3)$, što nas dovodi do $f(3) = 0$.

Ako je $f(3) = 0$, onda je i $f(13) = 0$.

Zato je $f(9) + f(13) = -9 + 0 = -9$.

Takve funkcije zaista postoje, evo primjera jedne od njih:



Obavijesti o rezultatima mogu se naći na mrežnim stranicama HMD-a.

http://www.matematika.hr/klokan/2026/