MATEMATIČKI KLOKAN 2026.

RJEŠENJA ZADATAKA

J

Pitanja za 3 boda:

1. [Bjelorusija] Koja je vrijednost izraza $(1-2)-(3-4)-(5-6)-\cdots-(2025-2026)$?

A) -1031 B) -1011 C) 1011 D) 1013 E) 2024

Rješenje: C
$(1-2)-(3-4)-(5-6)-\cdots-(2025-2026)=-1-(-1)-(-1)-\cdots-(-1)=$
$=-1+1+1+\cdots+1.$
Ukupno ima 2013 zagrada pa je rješenje $-1+1012=1011$.

2. [Hrvatska] Andrea, Beta, Cecilia i Diana zauzele su prva četiri mjesta u skakanju u vreći. Troje gledatelja tvrdi:

1. Andrea je osvojila drugo mjesto, a Diana treće.
2. Andrea je osvojila prvo mjesto, a Diana drugo.
3. Cecilia je osvojila drugo mjesto, a Diana četvrto.

U svakoj od izjava jedan je plasman istinit, a drugi neistinit. Koje je mjesto zauzela Beta?

A) Prvo. B) Drugo. C) Treće. D) Četvrto. E) Nije moguće odrediti.

Rješenje: D
Točan je redoslijed: Andrea, Cecilia, Diana, Beta.

3. [Latvija] Ena je imala 19 šljiva. Svaki od pet članova njezine obitelji pojeo je 3 ili 4 šljive. Koliko ih je pojelo 4 šljive ako su pojedene sve šljive?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: D
Da su svi pojeli po 3 šljive, ukupno bi bilo pojedeno $5\cdot 3=15$ šljiva. Preostaje $19-15=4$ šljive koje je pojelo četvero ljudi.

4. [Španjolska] Godina 2026. ima sljedeća dva svojstva: točno dvije su znamenke jednake, a suma svih znamenaka je 10. Koliko godina 21. stoljeća ima ta dva svojstva?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: E
Sve su godine u 21. stoljeću ili oblika 20** ili je to godina 2100. (koja očito nema dana svojstva).
Godine koje imaju dva zadana svojstva su: 2008, 2026, 2044, 2062 i 2080.

5. [Bjelorusija] Abdul je zapisao sedmeroznamenkasti broj, $\overline{193391a}$. Zapisani broj djeljiv je brojem 6. Koja je vrijednost znamenke a?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

Rješenje: C
Broj je djeljiv sa 6 ako je djeljiv brojevima 2 i 3. Stoga a mora biti paran broj za koji je zbroj znamenaka $1+9+3+3+9+1+a=26+a$ djeljiv brojem 3. Jedina znamenka za koju to vrijedi je $a=4$.

6. [Meksiko] Kristina želi u dijagram na slici upisati brojeve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

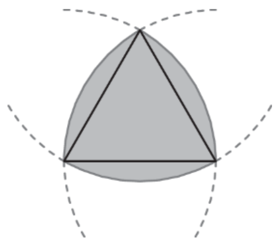
	2					5

Već je upisala dva broja, kako je prikazano. Želi da zbroj brojeva u susjednim ćelijama bude neparan i da zbroj brojeva u tri susjedne ćelije **ne bude** višekratnik broja 3. Koliki će biti zbroj brojeva upisanih u osjenčane ćelije?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

Rješenje: B
U ćelijama se moraju izmjenjivati neparni i parni brojevi pa brojeve 4 i 6 treba upisati u 4. i 6. ćeliju (nekim redoslijedom).
Ako je u 6. ćeliji broj 4, onda u 5. ćeliji mora biti 1 ili 7, što znači da se 3 nalazi u 1. ili 3. ćeliji – s jedne strane broja 2. S druge strane broja 2 onda je 7 ili 1. U svakom je dakle slučaju zbroj brojeva u prve tri ćelije višekratnik broja 3, što ne želimo. Dakle, u 6. ćeliji mora biti broj 6.
Ako je u 6. ćeliji broj 6, u 5. ćeliji mora biti broj 3 (inače bi zbroj brojeva u zadnje tri ćelije bio višekratnik broja 3). Sada vidimo da će zbroj brojeva u osjenčanim ćelijama biti $4 + 3 = 7$.
Dijagram se može popuniti na željeni način stavljajući brojeve 1 i 7 u 1. i 3. ćeliju u bilo kojem redoslijedu.

7. [Španjolska] Na slici je prikazan jednakostraničan trokut i tri kružna luka, svaki sa središtem u jednom vrhu trokuta i polumjera jednakog duljini stranice trokuta. Duljina stranice trokuta je 2 cm. Koliki je opseg osjenčanog lika?



A) π cm B) 6 cm C) 2π cm D) 8 cm E) 4π cm

Rješenje: C
Opseg osjenčanog lika jednak je zbroju duljina lukova od kojih se sastoji. Ti su lukovi sukladni, pripadaju kružnicama istog polumjera i kutu od 60°. Opseg lika stoga je duljina luka kružnice istog polumjera koji pripada kutu od 180°, tj. pola opsega kružnice: $r\pi = 2\pi$.

8. [Ujedinjeno Kraljevstvo] Farmerica na svome imanju ima pse, ovce, koze, svinje i kokoši. Kokoši ima više nego svinja, svinja ima više nego koza, koza ima više nego ovaca, ovaca ima više nego pasa. Broj pasa dva je puta manji od broja kokoši. Ukupan broj životinja najmanji je moguć. Koliko je životinja na ovome imanju?

A) 28 B) 30 C) 32 D) 34 E) 36

Rješenje: B
Označimo broj pasa na imanju s n. Kako je ukupan broj životinja najmanji moguć, ovaca ima $n + 1$. Iz istog razloga koza ima $n + 2$, svinja $n + 3$, a kokoši $n + 4$. Znamo i da je broj pasa upola manji od broja kokoši: $n = \frac{n+4}{2}$. Rješenje ove jednadžbe je $n = 4$ pa je ukupan broj životinja na imanju $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$.

Pitanja za 4 boda:

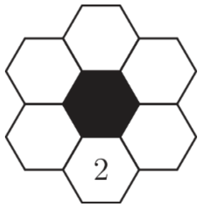
9. [Njemačka] Nakon jednodnevnog planinarenja pet je planinara prekriveno ubodima komaraca. Imaju 7, 9, 10, 13 i 14 uboda. Broj uboda koje imaju Anton i Linda zajedno tri je puta veći od broja uboda koje ima Kaj. Broj uboda koje imaju Mia i Linda zajedno dva je puta veći od broja uboda koje ima Petar. Koliko uboda ima Linda?

A) 7 B) 9 C) 10 D) 13 E) 14

Rješenje: D
Anton i Linda zajedno imaju najviše $13 + 14 = 27$ uboda. Stoga Kaj ima najviše $27 : 3 = 9$ uboda, dakle 7 ili 9. Ako bi Kaj imao 7 uboda, onda bi Anton i Linda zajedno imali 21 ubod, što nije moguće jer nikoja dva od brojeva 9, 10, 13 i 14 ne daju zbroj 21. Dakle, Kaj ima 9, a **Anton i Linda imaju 13 i 14 uboda nekim redoslijedom**.

Slijedi da Petar ima ili 7 ili 10 uboda. Tada Mia i Linda zajedno moraju imati $2 \cdot 7 = 14$ ili $2 \cdot 10 = 20$ uboda. Budući da Mia i Linda zajedno imaju najmanje $7 + 9 = 16$ uboda, moraju imati 20 uboda. Dakle, **Mia i Linda imaju 7 i 13 uboda nekim redoslijedom**. Stoga Linda ima 13 uboda.

10. [Poljska] Brojeve 2, 3, 5, 7, 11 i 13 treba upisati u bijele šesterokute. Zbroj brojeva u susjednim ćelijama **ne smije** biti prost broj. Broj 2 već je upisan. Na koliko se načina može dovršiti zadatak?



A) 2 B) 6 C) 12 D) 60 E) 120

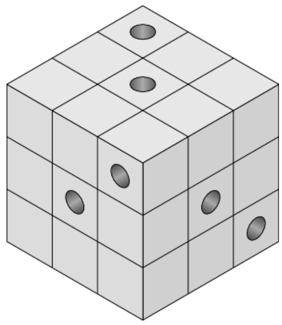
Rješenje: C
Kada broju 2 pribrojimo 3, 5 ili 11, dobit ćemo prost broj. Stoga u ćelijama susjednim broju 2 moraju biti brojevi 7 i 13 u nekom redoslijedu (2 izbora). U preostale tri ćelije možemo smjestiti preostale brojeve u bilo kojem redoslijedu ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ izbora). Naime, kako su brojevi 3, 5, 7, 11, 13 neparni, zbroj bilo koja dva bit će paran pa ne može biti prost.
Ukupno imamo $2 \cdot 6 = 12$ mogućnosti.

11. [Mjanmar] Na kružnici je petnaest točaka na jednakome razmaku. Koliko se pravilnih poligona može nacrtati korištenjem tih točaka kao njihovih vrhova?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

Rješenje: C
Djelitelji broja 15 su 1, 3, 5 i 15, stoga je moguće nacrtati pravilne trokute, peterokute ili petnaesterokute. Jedan je takav petnaesterokut, 3 peterokuta i 5 trokuta, što ukupno daje $1 + 3 + 5 = 9$ mogućnosti.

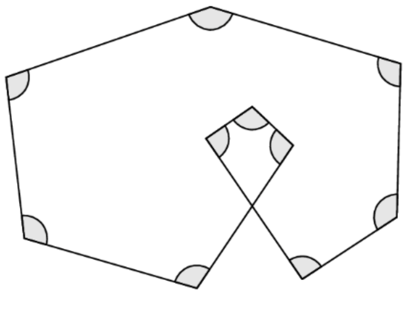
12. [Slovačka] Šest crvotočaca udomaćilo se u staroj drvenoj kocki koja se sastoji od manjih drvenih kockica. Svaki je crv napravio jedan tunel kroz cijelu kocku paralelno s jednim njezinim bridom. Na slici se vide ulazi u tih šest tunela. Kroz koliko malih kockica **ne** prolazi tunel?



A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 21

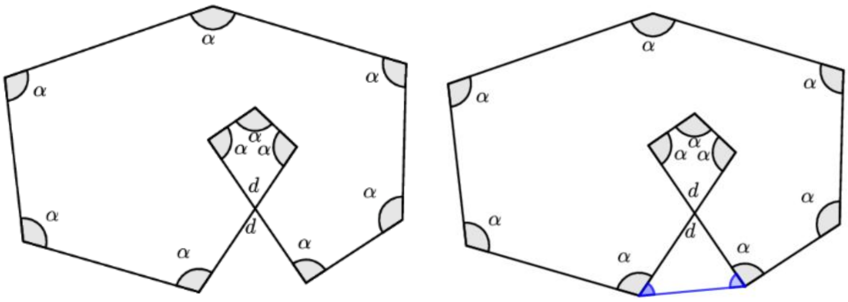
Rješenje: C
Prebrojimo li kockice u kojima postoje tuneli pazeći da istu kockicu ne bojimo više puta, vidimo da je takvih 15. Ukupno je 27 kockica, dakle kroz $27 - 15 = 12$ njih ne prolazi tunel.

13. [Katalonija] Na slici je prikazan lik s deset označenih sukladnih kutova. Koja je mjera svakoga od tih kutova?



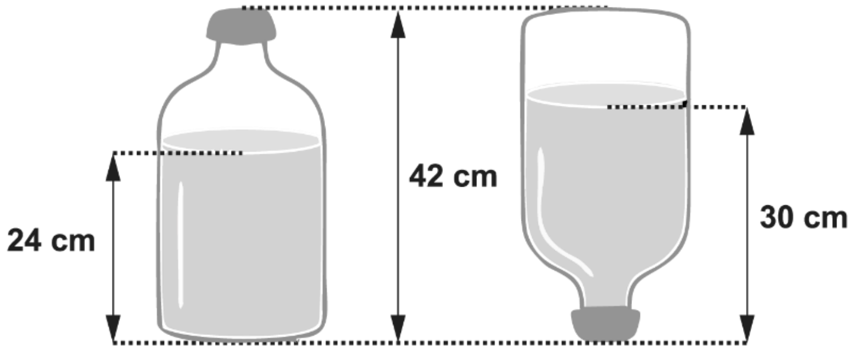
A) 96° B) 105° C) 108° D) 115° E) 120°

Rješenje: C
Označimo s α mjeru traženoga kuta, a s d mjeru četvrtog kuta u unutarnjem četverokutu, $d = 360° - 3\alpha$.



Povežemo li dva vrha kao na desnoj slici, dobit ćemo konveksan sedmerokut u kojemu je zbroj kutova $5 \cdot 180°$, odnosno $7\alpha + (180° - d)$.
Iz jednakosti $7\alpha + (180° - 360° + 3\alpha) = 5 \cdot 180°$ slijedi $10\alpha = 6 \cdot 180°$, tj. $\alpha = 108°$.

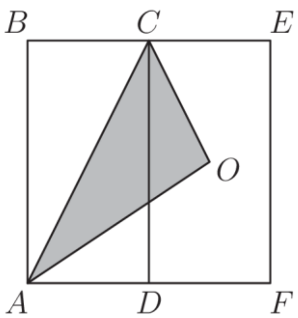
14. [Vijetnam] Na slici je prikazano kako se visina vode mijenja kada se boca u kojoj se ona nalazi preokrene. Zapremnina boce je 4.5 litara. Dio ispunjen vodom na lijevoj slici oblika je valjka. Koliko se litara vode nalazi u boci?



A) 2.4 B) 2.5 C) 2.7 D) 3.0 E) 3.5

Rješenje: D
Neka je B površina dna boce (baze valjka vode na lijevoj slici, tj. praznog valjka na desnoj slici). Volumen vode u boci stoga je $B \cdot 24$ (lijeva slika), a volumen praznog dijela boce $B \cdot 12$ (desna slika, $h = 42 - 30$).
Dio boce ispunjen vodom tada je $\frac{24B}{24B+12B} = \frac{2}{3}$. U boci se nalazi $\frac{2}{3} \cdot 4.5 = 3$ litre vode.

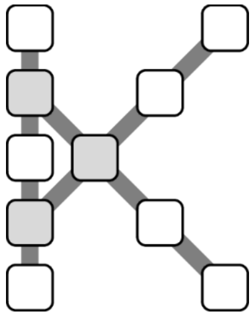
15. [Peru] Na slici su sukladni pravokutnici $ADCB$ i $DFEC$, a točka O sjecište je dijagonala pravokutnika $DFEC$. Koji dio površine pravokutnika $AFEB$ zauzima trokut AOC?



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{9}$

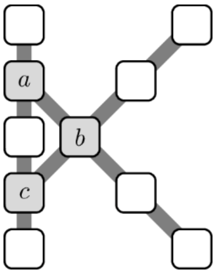
Rješenje: A
Znamo da je točka O polovište dijagonale $\overline{CF}$ pa je površina trokuta AOC jednaka površini trokuta AFO, $P_{AOC} = P_{AFO}$ (jednaka duljina jedne stranice i duljina visine na tu stranicu). Onda je $P_{AOC} = \frac{1}{2} P_{AFC}$.
Kako su trokuti ACB, ADC, DEC i DFE sukladni, vrijedi da je $P_{AFC} = \frac{1}{2} P_{AFEB}$.
Slijedi da je $P_{AOC} = \frac{1}{2} P_{AFC} = \frac{1}{4} P_{AFEB}$.

16. [Tunis] Jakov želi brojeve od 1 do 10 smjestiti u ćelije prikazane na slici. Želi da zbroj brojeva na svakoj prikazanoj liniji bude isti. Također želi da taj zbroj bude najveći mogući. Koliko će iznositi zbroj brojeva koje će Jakov smjestiti u tri osjenčane ćelije?

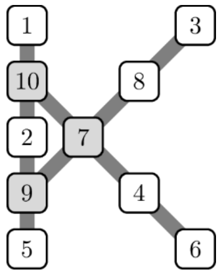


A) 13 B) 18 C) 23 D) 26 E) 27

Rješenje: D



Neka je S zbroj brojeva na svakoj prikazanoj liniji. Neka su a, b i c brojevi koje treba upisati u osjenčane ćelije, kao na slici lijevo.
Svaki od brojeva a, b i c pojavit će se u dva zbroja pa imamo:
$3S = (1 + 2 + 3 + \cdots + 10) + a + b + c = 55 + a + b + c$.
$55 + a + b + c$ mora biti najveći mogući broj djeljiv brojem 3.
To ćemo postići ako je $a + b + c = 10 + 9 + 7 = 26$.
Tada je $3S = 81$, odnosno $S = 27$.
Primjer da je to moguće postići prikazan je na slici desno.



Pitanja za 5 bodova:

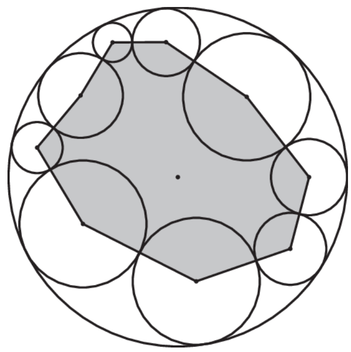
17. [Mjanmar] U prvom krugu šahovskog turnira igrao je svaki protiv svakog igrača točno jednom. Igrač osvaja 3 boda ako pobijedi, -1 bod ako izgubi, a 1 bod ako bude neriješeno. Na kraju prvog kruga zbroj bodova svih igrača iznosio je 90. Koliko je igrača sudjelovalo na turniru?

A) 5 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

Rješenje: C

Nakon svakog meča ukupan se broj bodova poveća za 2. Na turniru je zato odigrano $\frac{90}{2} = 45$ mečeva. Ako broj igrača označimo s n, imamo $\frac{n(n-1)}{2} = 45$. Iz ove jednadžbe dobivamo $n = 10$.

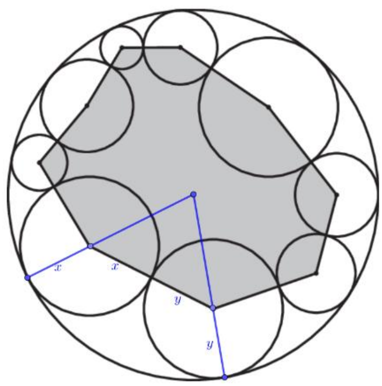
18. [Poljska] Na slici je prikazana velika kružnica polumjera 10 cm i devet manjih kružnica od kojih svaka dodiruje veliku kružnicu iznutra i dvije manje kružnice izvana. Zbroj svih udaljenosti središta velike kružnice od središta manjih kružnica iznosi d. Izrazi opseg osjenčanog lika pomoću d.



A) $90 - 2d$ B) $90 - d$ C) $180 - d$ D) $180 - 2d$ E) $180 + 2d$

Rješenje: D

Označimo polumjer velike kružnice s R. Spojimo središte velike kružnice sa središtima manjih kružnica. Vidjet ćemo da se osjenčani lik sastoji od devet trokuta.
Opseg svakoga od tih trokuta jednak je $2R$ (vidi sliku).
Opseg osjenčanog lika onda je $9 \cdot 2R - 2 \cdot d$, odnosno $180 - 2d$.



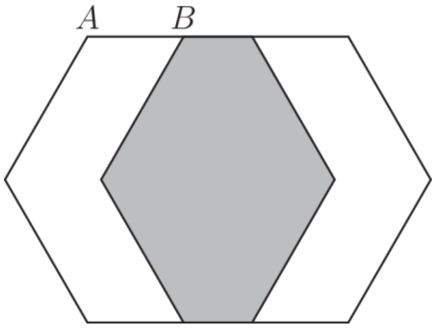
19. [Bjelorusija] Za dva prirodna broja a i b vrijedi jednakost $a^b - ab = 2026$. Koliko iznosi $a + b$?

A) 10 B) 13 C) 15 D) 1013 E) 1015

Rješenje: B
Izraz $a^b - ab = a\left(a^{b-1} - b\right)$ djeljiv je brojem a. Rastav broja 2026 na proste faktore je $2026 = 2 \cdot 1013$, stoga a može biti samo 1, 2, 1013 ili 2026. Provjerom se lako utvrdi da samo $a = 2$ vodi do rješenja. Tada je $b = 11$, pa je $a + b = 13$.

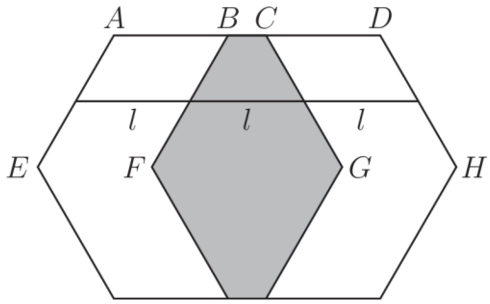
20. [Slovačka] Na slici su prikazana dva pravilna šesterokuta stranice duljine 60 (nije u mjerilu). Desni šesterokut dobiven je translacijom lijevog šesterokuta za vektor $\overrightarrow{AB}$. Tako su stvorena tri lika jednakih površina.

Kolika je duljina dužine $\overline{AB}$?



A) 30 B) 39 C) 40 D) 45 E) 52

Rješenje: D



Ako stvorena tri lika imaju istu površinu, onda i četverokuti $AEFB$, $BFGC$ i $CGHD$ imaju istu površinu. Kako se radi o trapezima iste visine, tako im i srednjica l mora biti jednake duljine.

U trapezu $AEGC$ vidimo da je $2l = \frac{|EG|+|AC|}{2} = \frac{120+60}{2} = 90$, odnosno $l = 45$.

Budući da je četverokut $AEFB$ paralelogram, vrijedi $|AB| = l = 45$.

21. [Indija] Ron ima osam štapova čije su duljine različiti prirodni brojevi. Ni od koja tri štapa ne može se napraviti trokut. Koja je najmanja moguća duljina najduljega štapa?

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

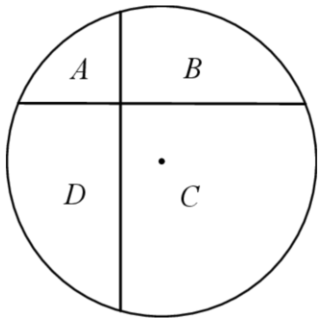
Rješenje: E
Ako su $a < b < c$ duljine stranica trokuta, mora vrijediti $a + b > c$.
Odnosno, ako vrijedi $c \geq a + b$, onda dužine duljina $a < b < c$ ne mogu tvoriti trokut.
Najkraće moguće duljine dobit ćemo krenemo li od najmanjih prirodnih brojeva, a za duljinu svakog sljedećeg štapa u nizu biramo upravo zbroj duljina prethodnih dvaju. Niz je: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.

22. [Italija] Vedran i Pavo izmjenjuju se u uzimanju karamela iz kutije: Vedran uzme 1, zatim Pavo uzme 2, pa Vedran uzme 3, zatim Pavo uzme 4, i tako dalje. Kada u kutiji nema dovoljno karamela da bi se na isti način nastavila raspodjela, dječak koji je na redu uzima sve preostale karamele. Na kraju Vedran ima 407 karamela. Koliko je na samome početku u kutiji bilo karamela?

A) 814 B) 827 C) 834 D) 841 E) 851

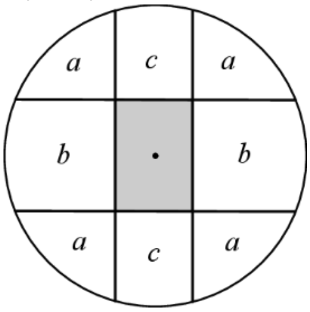
Rješenje: B
Nakon n posezanja u kutiju Vedran ima $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ karamela,
a Pavo $2 + 4 + 6 + \cdots 2n = n(n + 1)$ karamela.
Vedran je morao biti zadnji koji uzima preostalih $407 - 20^2 = 7$ karamela, to je njegovo 21. posezanje u kutiju.
Pavo je onda u svojih 20 posezanja ukupno uzeo $20 \cdot 21 = 420$ karamela.
U kutiji je na samome početku bilo $420 + 407 = 827$ karamela.

23. [Mađarska] Na slici je krug polumjera 12 cm koji je dvjema međusobno okomitim tetivama podijeljen na četiri lika označena A, B, C, D. Jedna je tetiva od središta kruga udaljena 3 cm, a druga 4 cm. Zbroj površina likova A i C za x je veći od zbroja površina likova B i D. Koliko iznosi x?



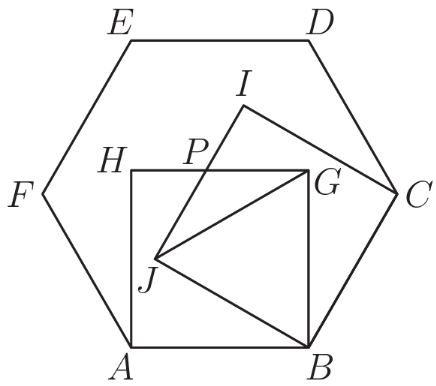
A) 9 cm^2 B) 16 cm^2 C) 36 cm^2 D) 48 cm^2 E) 60 cm^2

Rješenje: D



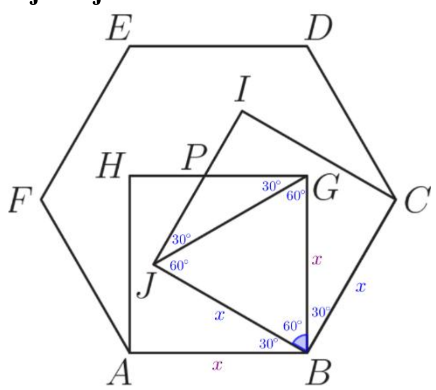
Zrcalimo li dane tetive s obzirom na središte kružnice, dobit ćemo devet likova kao na slici lijevo.
Oni likovi koji su označeni istim slovom (a, b, c) imaju istu površinu.
Površina osjenčanog lika, pravokutnika, iznosi $(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) = 48$.
Razmatrajući površine likova sada imamo:
$x = (A + C) - (B + D) = (a + 48 + b + c + a) - (c + a + b + a) = 48.$

24. [Brazil] Neka je $ABCDEF$ pravilan šesterokut, a $ABGH$ i $BCIJ$ kvadrati nad njegovim stranicama, kao na slici. Točka P presjek je dužina $\overline{HG}$ i $\overline{JI}$. U kojem su omjeru površine trokuta JGP i BGJ?



A) $1:3$ B) $\sqrt{3}:6$ C) $1:4$ D) $2:5$ E) $1:2$

Rješenje: A



Označimo duljinu stranice šesterokuta s x. Kako se radi o pravilnom šesterokutu i o kvadratima, lako možemo zaključiti da je trokut BGJ jednakostraničan (vidi sliku lijevo), stranice duljine x. Njegova površina iznosi $P_{BGJ} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.
Trokut JGP jednakokračan je s osnovicom duljine x i kutom uz osnovicu 30° pa je njegova površina $P_{JGP} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} x}{4} = \frac{x^2\sqrt{3}}{12}$.
Sada vidimo da je $\frac{P_{JGP}}{P_{BGJ}} = \frac{1}{3}$.

Obavijesti o rezultatima mogu se naći na mrežnim stranicama HMD-a.
http://www.matematika.hr/klokan/2026/