MATEMATIČKI KLOKAN 2025.

RJEŠENJA ZADATAKA

S

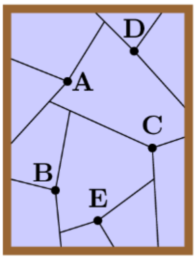
Pitanja za 3 boda:

1. [Iran] Godina 2025. potpuni je kvadrat jer je $2025 = 45^2$. Koliko će godina proći do sljedeće godine koja će biti potpuni kvadrat?

   A) 25 B) 91 C) 121 D) 500 E) 2025

   Rješenje: B
   Sljedeća godina koja će biti potpuni kvadrat je $46^2 = 2116$, što je za 91 godinu.

2. [Grčka] Pet kamenčića pogodilo je prozor u točkama A, B, C, D i E. Kada kamenčić pogodi prozor, nastanu ravne pukotine koje završavaju ili na okviru prozora ili na prethodno nastaloj pukotini. Kojim su redom kamenčići udarali u prozor?



   A) DACBE B) ABCDE C) BDACE D) BCDAE E) DCABE

   Rješenje: A
   Pukotina iz E završava na pukotini iz B pa je B pogođeno prije E.
   Pukotina iz B završava na pukotini iz C pa je C pogođeno prije B.
   Pukotina iz C završava na pukotini iz A pa je A pogođeno prije C.
   Pukotina iz A završava na pukotini iz D pa je D pogođeno prije A.
   Dakle, redoslijed je DACBE.

3. [Ukrajina] Vjeko ima 20 loptica različitih boja: žute, zelene, plave i crne. Točno 17 loptica nije zelene boje, točno 15 loptica nije crne boje i točno 12 loptica nije žute boje. Koliko plavih loptica ima Vjeko?

   A) 8 B) 7 C) 6 D) 4 E) 3

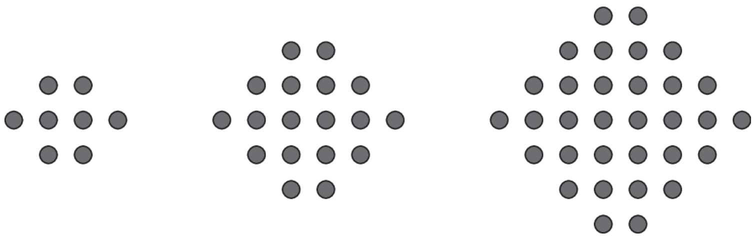
   Rješenje: D
   Vjeko ima $20 - 17 = 3$ zelene loptice, $20 - 15 = 5$ crnih loptica i $20 - 12 = 8$ žutih loptica.
   Preostaju $20 - 3 - 5 - 8 = 4$ plave loptice.

4. [Ujedinjeno Kraljevstvo] Čemu je jednak drugi korijen broja 16^{16}?

   A) 4^4 B) 4^8 C) 4^{16} D) 8^8 E) 16^4

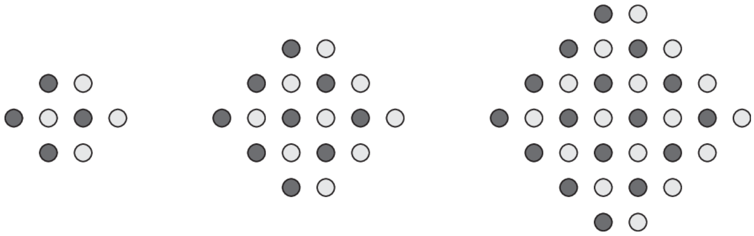
   Rješenje: C
   $\sqrt{16^{16}} = \sqrt{16}^{16} = 4^{16}$.

5. [Španjolska] Na slici su prikazana prva tri člana niza. Od koliko će se točkica sastojati peti član toga niza?



A) 72 B) 74 C) 76 D) 78 E) 80

Rješenje: A



Svaki se član sastoji od dvaju kvadrata – tamnog i svijetlog na slici. Broj točkica na stranici obaju kvadrata poveća se za jedan u svakome koraku. Stoga će se n-ti član niza sastojati od $2(n+1)^2$ točkica. Sada lako odredimo da će se peti član niza sastojati od $2 \cdot 6^2 = 72$ točkice.

6. [Austrija] Martin je s x označio broj koji se dobije kada se $\sqrt{11}$ podijeli brojem 3. Gdje se nalazi x na brojevnom pravcu?

A) Između 0 i 1. B) Između 1 i 2. C) Između 2 i 3. D) Između 3 i 4. E) Između 4 i 5.

Rješenje: B

Kako je $9 < 11 < 16$, onda je $3 < \sqrt{11} < 4$. Slijedi da je $1 < \frac{\sqrt{11}}{3} < 1\frac{1}{3}$.

7. [Njemačka] Sanjina najdraža čokolada pakirana je u pločice. Prije je svaki paket sadržavao pet pločica, a sada jedan paket sadrži četiri pločice čokolade, no cijena paketa ostala je ista. Za koji se postotak povećala cijena jedne pločice čokolade?

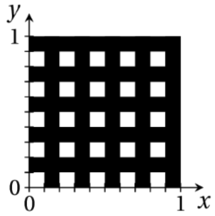
A) za 10 % B) za 20 % C) za 25 % D) za 30 % E) za 50 %

Rješenje: C

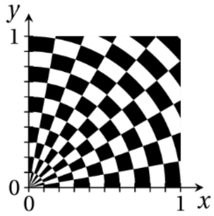
Recimo da je cijena jednog paketića a. Prije je cijena jedne pločice bila $\frac{a}{5}$, dok je sada $\frac{a}{4}$. Faktor povećanja je $\frac{\frac{a}{4}}{\frac{a}{5}} = \frac{5}{4} = 1.25$, što znači da je jedna pločica čokolade poskupjela 25 %.

8. [Finska] U koordinatnoj su ravnini neke točke obojene crno. Za $0 < x < 1$ i $0 < y < 1$ točka (x, y) obojena je crno ako su znamenke desetinke brojeva x i y neparne. Kako taj skup izgleda?

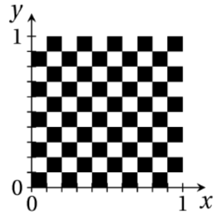
A)



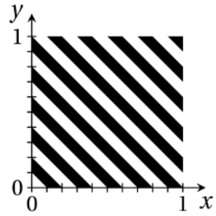
B)



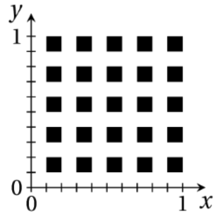
C)



D)

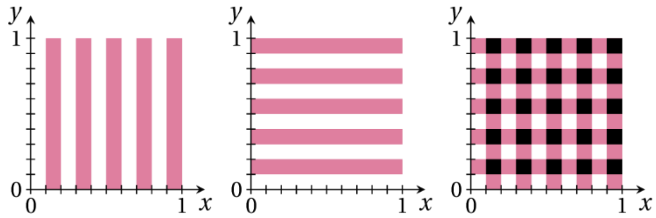


E)



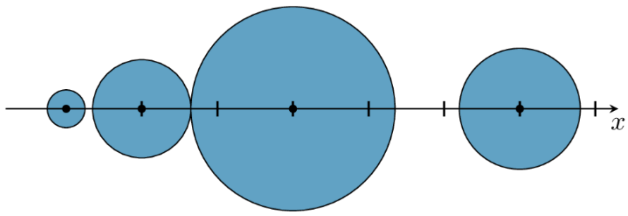
Rješenje: E

Znamenka desetinki (prva nakon decimalne točke) realnih brojeva između 0 i 1 neparna je u intervalima $[0.1, 0.2\rangle$, $[0.3, 0.4\rangle$, $[0.5, 0.6\rangle$, $[0.7, 0.8\rangle$, $[0.9, 1\rangle$. Gledamo li samo apscise točaka, to nam daje prvu sliku, a gledamo li samo ordinate točaka, dobivamo drugu sliku. Njihov presjek, koji vidimo na trećoj slici, rješenje je zadatka.



Pitanja za 4 boda:

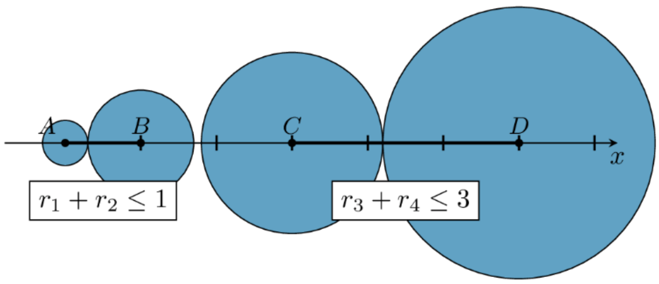
9. [Finska] Četiri kruga radijusa r_1, r_2, r_3 i r_4 imaju središta u točkama $(0,0)$, $(1,0)$, $(3,0)$ i $(6,0)$. Krugovi se mogu dodirivati, no ne smiju se preklapati. Koja je najveća moguća vrijednost zbroja $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) Ne postoji najveća vrijednost.

Rješenje: B

Označimo središta kružnica A, B, C, D s lijeva na desno. Tada $r_1 + r_2$ najviše može biti $|AB| = 1$. Također, $r_3 + r_4$ najviše može biti $|CD| = 3$. Najveća moguća vrijednost zbroja $r_1 + r_2 + r_2 + r_4$ tada je $1 + 3 = 4$. Ovo je moguće postići, a primjer je na slici.



10. [Afganistan] Među 10 prirodnih brojeva točno ih je pet djeljivo s 5 i točno ih je sedam djeljivo sa 7. Neka je M najveći među njima. Koja je najmanja moguća vrijednost broja M?

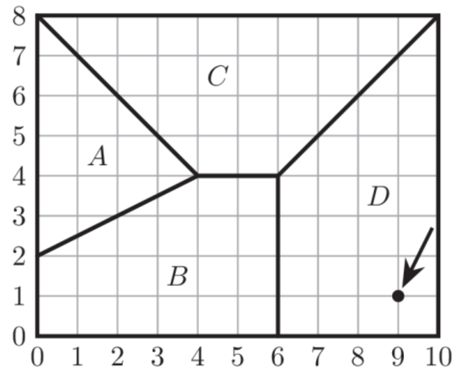
A) 105 B) 77 C) 75 D) 63 E) Neka druga vrijednost.

Rješenje: E

Kako je od 10 brojeva njih pet djeljivo s 5, a njih sedam sa 7, barem dva broja moraju biti djeljiva i s 5 i sa 7. Najmanja dva prirodna broja djeljiva s 5 i 7 su 35 i 70 pa M može biti najmanje 70.

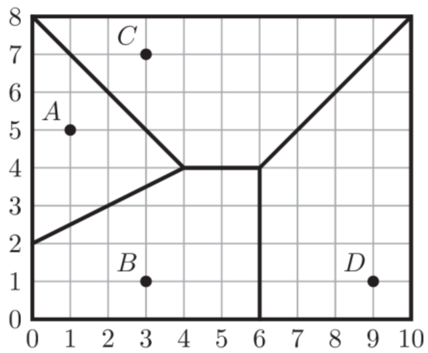
Evo primjera takvih 10 brojeva: $7, 14, 21, 28, 35, 42, 45, 50, 55, 70$.

11. [Grčka] Karta prikazuje mali grad koji ima četiri škole. Prikazana područja A, B, C i D obuhvaćaju sve točke koje su najbliže pojedinoj školi. Koordinate škole u području D su $(9,1)$. Koje su koordinate škole u području A?



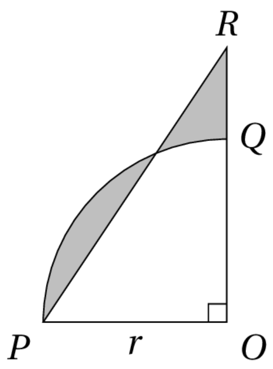
A) $(0,4)$ B) $(1,4)$ C) $(1,5)$ D) $(1,6)$ E) $(2,4)$

Rješenje: C



Svaka linija koja razdvaja dva područja leži na simetrali dužine koja spaja dvije škole u tim područjima (svaka točka na simetrali dužine jednako je udaljena od njezinih krajeva). Drugim riječima, dvije susjedne škole osno su simetrične s obzirom na liniju koja razdvaja područja u kojima se one nalaze. Zrcaljenjem škole u području D dobijemo da su $(3,1)$ koordinate škole u području B. Zrcaljenjem te točke u područje A dobivamo da su $(1,5)$ koordinate škole u području A.

12. [Ujedinjeno Kraljevstvo] Na slici je prikazana četvrtina kruga OPQ i trokut OPR. Dva osjenčana lika imaju istu površinu. Kolika je duljina dužine $\overline{OR}$?



A) $\frac{\pi r}{2}$ B) $\frac{3r}{2}$ C) πr D) $\frac{2}{\pi}$ E) $\frac{\pi}{2r}$

Rješenje: A

Budući da dva osjenčana lika imaju istu površinu, površina trokuta bit će ista kao površina četvrtine kruga. Imamo: $\frac{r\cdot|OR|}{2} = \frac{r^2\pi}{4}$, tj. $|OR| = \frac{r\pi}{2}$.

13. [Grčka] Odredi najmanji prirodni broj N takav da je $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{N}}}$ prirodan broj.

A) $2^{12}\cdot 3^6$ B) $2^4\cdot 3^{14}$ C) $2^4\cdot 3^6\cdot 5^8$ D) $2^4\cdot 3^2$ E) Ništa od navedenog.

Rješenje: E

Kako bi $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{N}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot N}}} = \sqrt[8]{2^4\cdot 3^2\cdot N}$ bio prirodan broj, pod korijenom mora biti osma potencija prirodnog broja. Najmanji broj za koji ćemo to postići je $N = 2^4\cdot 3^6$.

14. [Finska] Na 4×4 šahovskoj ploči nalazi se 16 klokana, po jedan u svakome polju. U svakom potezu svaki klokan skoči na jedno od susjednih polja (gore, dolje, lijevo ili desno, no ne i dijagonalno). Svi klokani ostaju na ploči. Na jednom polju može biti više klokana. Koji je najveći mogući broj praznih polja nakon 100 poteza?

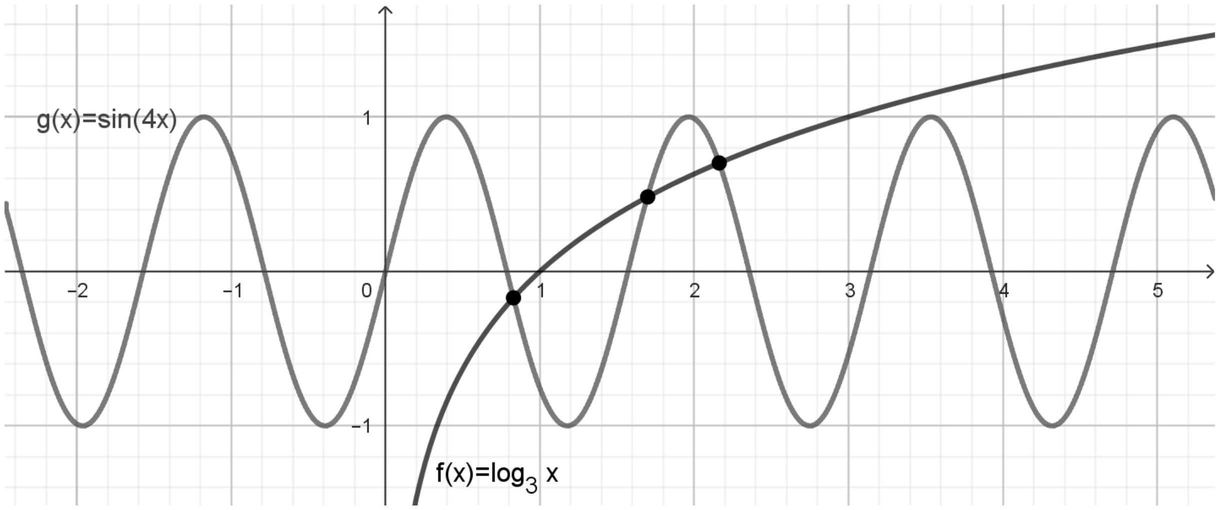
A) 15 B) 14 C) 12 D) 10 E) 8

Rješenje: B
U svakom potezu svaki klokan promijeni boju polja na kojemu stoji. Budući da klokani na početku stoje na dvije različite boje, barem dva polja moraju biti zauzeta, tj. najviše 14 polja može biti prazno.
To je moguće postići. Nakon 100 poteza svi će klokani biti na istoj boji s koje su i krenuli. Primjerice, svi klokani koji su na početku bili na crnome polju, mogu doći na crno polje dolje lijevo, a svi klokani koji su na početku bili na bijelom polju, mogu doći na bijelo polje dolje desno.

15. [Hrvatska] Koliko rješenja ima jednadžba $\log_3 x = \sin 4x$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Rješenje: D

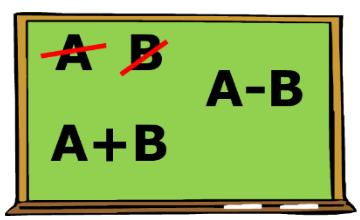


16. [Finska] Kada je baka počela plesti vunene čarape, imala je veliko klupko vune promjera 30 cm. Nakon ispletenih 70 čarapa njezino klupko ima promjer 15 cm. Koliko još čarapa baka može isplesti od preostale vune?

A) 70 B) 50 C) 30 D) 20 E) 10

Rješenje: E
Promjer klupka se prepolovio, što znači da je ostalo $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ početnog volumena klupka. Kako je od $\frac{7}{8}$ ukupnog volumena ispleteno 70 čarapa, od posljednje $\frac{1}{8}$ baka će isplesti još 10 čarapa.

Pitanja za 5 bodova:



17. [Grčka] Učenik započinje s dva broja zapisana na ploči. Izbriše ih i zapiše njihov zbroj i pozitivnu razliku. Nastavlja isti postupak s novozapisanim brojevima. Koja će dva broja biti zapisana na ploči ako počne s brojevima 3 i 5 te ponovi postupak 50 puta?

A) 3^{25} i 5^{25} B) 3^{50} i 5^{50} C) $2 \cdot 3^{25}$ i $2 \cdot 5^{25}$
D) $3 \cdot 2^{25}$ i $5 \cdot 2^{25}$ E) Ništa od navedenog.

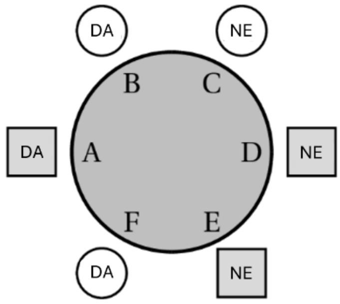
Rješenje: D

Iz (A, B) se u prvom koraku dobiva $(A+B, A-B)$, a u drugom

$\big((A+B)+(A-B),(A+B)-(A-B)\big)=(2A, 2B)$.

Zaključujemo da će se nakon svaka dva koraka brojevi udvostručiti, što nas dovodi do odgovora D.

18. [Grčka] Skupina od tri kvadratna čovjeka s Marsa i skupina od tri kružna čovjeka s Jupitera sjede za okruglim stolom kako je prikazano na slici. Jedan od njih ima ključ od svemirskog broda. Svi članovi jedne skupine uvijek lažu, dok svi članovi druge skupine uvijek govore istinu. Svima je postavljeno isto pitanje: „Ima li osoba koja sjedi pored tebe ključ?“ Njihovi odgovori prikazani su na slici. Tko ima ključ?



A) A B) B C) C D) D E) E

Rješenje: B

Pretpostavimo da kružni ljudi govore istinu, a kvadratni lažu. Tada A mora imati ključ, jer B i F kažu DA. Međutim, tada bi kvadratni ljudi E i D također govorili istinu, što je kontradikcija.

Dakle, kružni ljudi lažu, a kvadratni govore istinu. To znači da A i C sjede pokraj ključa, tj. da B ima ključ.

19. [Katalonija] Lota i njezina mlađa sestra Nora istovremeno su krenule u vožnju biciklima. Obje voze istom stazom i stalnom brzinom: Lota 18 km/h, a Nora 12 km/h. Lota se nakon 20 minuta umorila i odlučila vratiti istim putem. Kada je srela Noru, rekla joj je da se okrene pa su se obje vratile kući, svaka svojom brzinom. Koliko je minuta Nora kasnije od Lote stigla kući?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 15

Rješenje: C

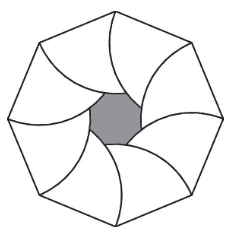
Lota je putovala $\frac{20}{60} \cdot 18 = 6$ km u jednome smjeru.

Krenula je natrag i srela sestru nakon t minuta. Zbroj puta koji je Lota prešla nakon okreta i ukupnog Norinog puta je 6 km, $\frac{20+t}{60} \cdot 12 + \frac{t}{60} \cdot 18 = 6$. Iz ove jednadžbe dobivamo da je $t = 4$ min.

Lota će se do kuće voziti još 16 minuta. Za to vrijeme prijeći će $\frac{16}{60} \cdot 18 = \frac{24}{5}$ km.

Nori za tih $\frac{24}{5}$ km treba $\frac{\frac{24}{5}}{12} = \frac{2}{5}$ h, tj. 24 minute. Nora će doći 8 minuta nakon Lote.

20. [Peru] Dan je pravilni osmerokut stranice duljine 1 cm. Iz svakog je njegovog vrha nacrtan luk radijusa 1 cm, kao na slici. Odredi opseg osjenčanog lika.

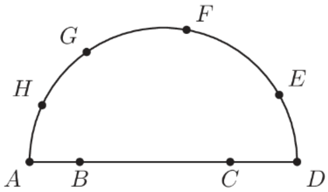


A) π cm B) $\frac{2\pi}{3}$ cm C) $\frac{8\pi}{9}$ cm D) $\frac{4\pi}{5}$ cm E) $\frac{3\pi}{4}$ cm

Rješenje: B

Unutrašnji kut pravilnog osmerokuta iznosi 135°. Svaki vrh osjenčanog lika tvori jednakostraničan trokut s odgovarajućom stranicom osmerokuta. Osjenčani lik obrubljen je lukovima kojima pripada kut od $135° - 60° - 60° = 15°$. Opseg će stoga biti $8 \cdot \frac{15°}{360°} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3}$.

21. [Sirija] Točke E, F, G i H leže na polukružnici promjera $\overline{AD}$, a točke B i C na samome promjeru. Koliko ima trokuta kojima su vrhovi tri od ovih osam točaka?

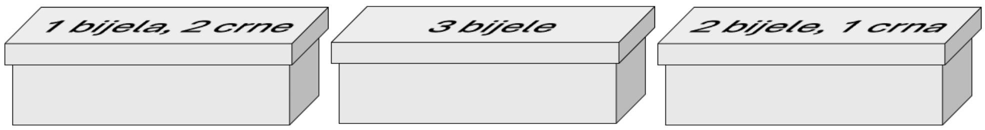


A) 15 B) 50 C) 51 D) 52 E) 54

Rješenje: D

Od osam točaka tri možemo izabrati na $\binom{8}{3} = 56$ načina. Da bi te tri točke tvorile trokut, ne smiju biti kolinearne pa moramo isključiti sve kombinacije točaka A, B, C, D, a njih ima $\binom{4}{3} = 4$. Traženih trokuta ima $56 - 4 = 52$.

22. [Bugarska] Tri su loptice u svakoj od tri kutije. Na poklopcu svake kutije opisan je njezin sadržaj. Poklopci su pomiješani pa sada nijedan poklopac ne opisuje točan sadržaj kutije.



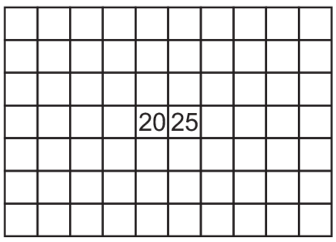
Mak može iz bilo koje kutije nasumično izvući jednu lopticu te zapisati njezinu boju. Lopticu ne vraća natrag u kutiju. To može ponoviti koliko god puta želi. Koji je najmanji broj loptica koje Mak treba izvući kako bi znao sadržaj svih kutija?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Rješenje: C

Budući da su poklopci pomiješani, u trećoj kutiji mogu biti ili 3 bijele kuglice ili 1 bijela i 2 crne kuglice. Dovoljna su dva izvlačenja iz nje da znamo sadržaj svih kutija. Ako izvučemo dvije bijele kuglice, znamo da su u njoj 3 bijele kuglice. Ako izvučemo barem jednu crnu kuglicu, znamo da je u njoj 1 bijela i 2 crne kuglice. Sadržaj preostalih dviju kutija potpuno je određen sadržajem ove.

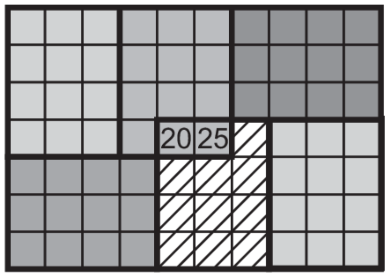
23. [Estonija] Patrik je u svako polje 7×10 tablice upisao broj. Zbroj brojeva u svakoj 3×4 ili 4×3 podtablici iznosi nula. Dva su broja zapisana na slici. Odredi zbroj svih brojeva u tablici.



A) -5 B) -20 C) -25 D) -45 E) Nije moguće odrediti.

Rješenje: D

Tablicu možemo podijeliti na pet sivih pravokutnika i iscrtkano područje. Zbroj brojeva u svakome od sivih pravokutnika je nula. Također, zbroj brojeva u iscrtkanom području s brojevima 20 i 25 mora biti nula. Zaključujemo da je zbroj brojeva u iscrtkanom području -45.

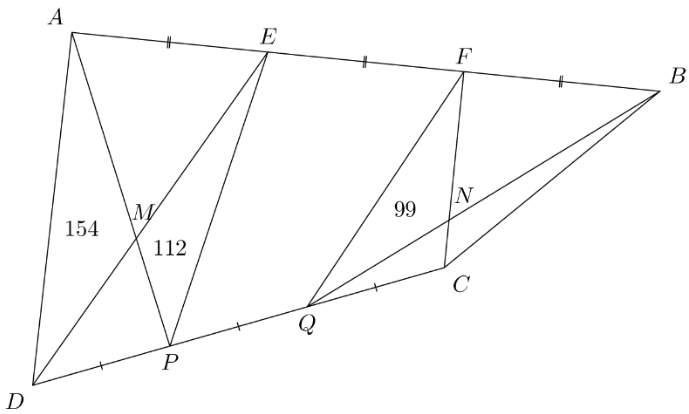


Zbroj brojeva u cijeloj tablici onda je $5 \cdot 0 + (-45) = -45$.

Evo i primjera da je ovakvo popunjavanje tablice moguće:

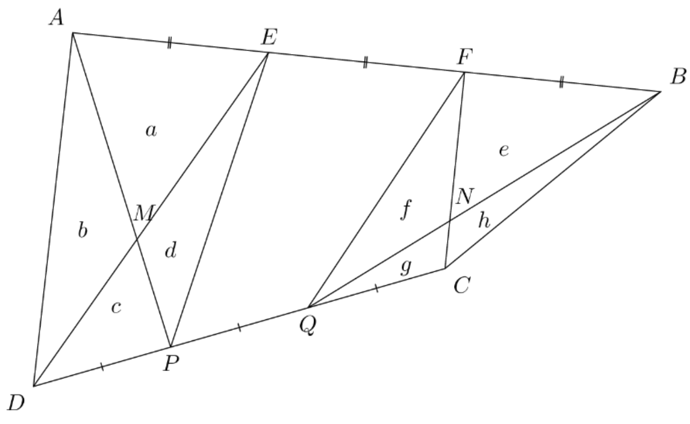
25	-20	-25	20	25	-20	-25	20	25	-20
-20	-25	20	25	-20	-25	20	25	-20	-25
-25	20	25	-20	-25	20	25	-20	-25	20
20	25	-20	-25	20	25	-20	-25	20	25
25	-20	-25	20	25	-20	-25	20	25	-20
-20	-25	20	25	-20	-25	20	25	-20	-25
-25	20	25	-20	-25	20	25	-20	-25	20

24. [Tunis] Stranica $\overline{AB}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ podijeljena je točkama E i F na tri jednaka dijela. Stranica $\overline{CD}$ istog četverokuta podijeljena je točkama P i Q na tri jednaka dijela. Točka M presjek je dijagonala četverokuta $AEPD$. Točka N presjek je dijagonala četverokuta $FBCQ$. Površina trokuta AMD je 154, površina trokuta EPM je 112, a površina trokuta FNQ je 99. Odredi površinu trokuta BCN.



A) 57 B) 70 C) 72 D) 86 E) 141

Rješenje: A



Na slici su slovima a, b, c, d, e, f, g, h označene površine odgovarajućih trokuta.

Vrijedi da je $a + b = P_{\Delta AED} = \frac{1}{3} P_{\Delta ABD}$ i $g + h = P_{\Delta QCB} = \frac{1}{3} P_{\Delta DCB}$.

Stoga imamo da je $a + b + g + h = \frac{1}{3}(P_{\Delta ABD} + P_{\Delta DCB}) = \frac{1}{3} P_{ABCD}$.

Slično, vrijedi da je $a + d = P_{\Delta AEP} = \frac{1}{2} P_{\Delta AFP}$ i $f + g = P_{\Delta QCF} = \frac{1}{2} P_{\Delta PCF}$.

Stoga imamo da je $a+d+f+g=\frac{1}{2}(P_{\Delta AFP}+P_{\Delta PCF})=\frac{1}{2}P_{APCF}=\frac{1}{2}(P_{\Delta FAC}+P_{\Delta PCA})=$
$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}P_{\Delta ABC}+\frac{2}{3}P_{\Delta DCA}\right)=\frac{1}{3}P_{ABCD}$.
Dakle, $a+b+g+h=a+d+f+g$, tj. $b+h=d+f$.
Za zadane brojeve imamo da je $h=d+f-b=112+99-154=57$.

Obavijesti o rezultatima mogu se naći na mrežnim stranicama HMD-a. **http://www.matematika.hr/klokan/2025/**