MATEMATIČKI KLOKAN 2025.

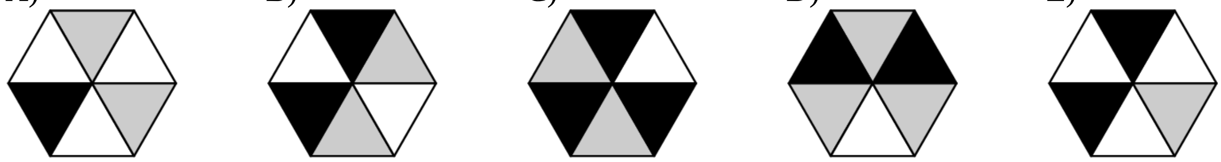
RJEŠENJA ZADATAKA

J

Pitanja za 3 boda:

1. [Njemačka] U kojem je od danih šesterokuta točno trećina površine obojena crno, a točno polovina površine bijelo?

A) B) C) D) E)



Rješenje: E
Svaki trokut šestina je šesterokuta pa tražimo onaj šesterokut u kojemu su točno dva trokuta obojena crno, a točno tri bijelo.

2. [Afganistan] Dan klokana obilježava se svake godine trećega četvrtka u ožujku. Koji je datum najraniji mogući Dan klokana?

A) 14. 3. B) 15. 3. C) 20. 3. D) 21. 3. E) 22. 3.

Rješenje: B
Najraniji mogući prvi četvrtak u ožujku bio bi 1. 3., što znači da je najraniji mogući treći četvrtak u ožujku 14 dana kasnije, tj. 15. 3.

3. [Njemačka] U receptu stoji da na 1 šalicu riže ide $1\frac{1}{2}$ šalica vode. Rajko želi upotrijebiti $1\frac{1}{2}$ šalicu riže. Koliko šalica vode treba staviti?

A) 1 B) $1\frac{1}{4}$ C) $1\frac{3}{4}$ D) $2\frac{1}{4}$ E) $2\frac{1}{2}$

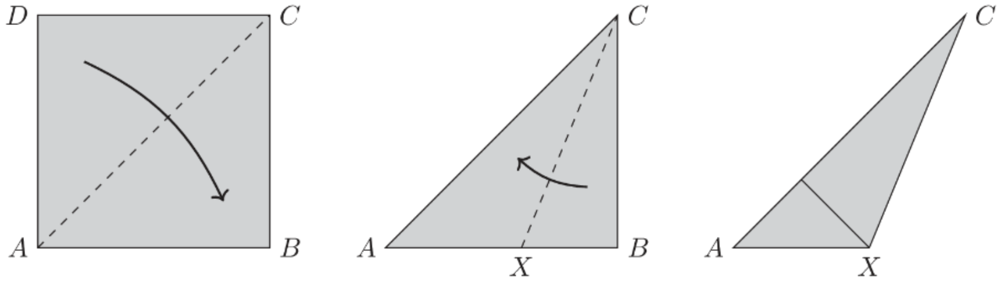
Rješenje: D
Treba staviti $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ šalica vode.

4. [Španjolska] Osnovica trokuta poveća se 50 %, a njegova se visina smanji za jednu trećinu. Koji je omjer površina novog i početnog trokuta?

A) 2 : 1 B) 1 : 1 C) 1 : 2 D) 1 : 3 E) 1 : 4

Rješenje: B
Neka je a osnovica, a v odgovarajuća visina početnoga trokuta. Njegova površina tada je $\frac{a \cdot v}{2}$.
Novi trokut ima osnovicu $\frac{3}{2}a$ i visinu $\frac{2}{3}v$ pa je njegova površina $\frac{\frac{3}{2}a \cdot \frac{2}{3}v}{2} = \frac{a \cdot v}{2}$.
Površine su iste, traženi je omjer 1 : 1.

5. [Australija] Aleksandra presavine papir oblika kvadrata preko njegove dijagonale tako da dobije trokut. Zatim ponovo presavine papir tako da jedna od kateta toga trokuta legne na njegovu hipotenuzu. Na taj je način dobila manji trokut AXC, kao na slici.
Koja je mjera kuta $\angle AXC$?



A) 108° B) 112.5° C) 120° D) 145° E) 157.5°

Rješenje: B
ABC jednakokračan je pravokutan trokut pa je $\angle CAB = \angle ACB = 45°$. Kako je $\angle ACX = \angle XCB$, vrijedi $\angle ACX = \frac{1}{2}\angle ACB = 22.5°$. Konačno, iz trokuta AXC vidimo da je $\angle AXC = 180° - \angle CAX - \angle ACX = 180° - 45° - 22.5° = 112.5°$.

6. [Australija] Četveroznamenkastom broju 80□□ nedostaju posljednje dvije znamenke. Taj broj djeljiv je brojevima 8 i 9. Odredi umnožak dviju znamenaka koje nedostaju.

A) 6 B) 16 C) 20 D) 24 E) 48

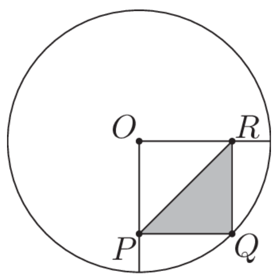
Rješenje: D
Označimo posljednje dvije znamenke s a i b.
Prirodni je broj djeljiv s 8 ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv s 8. Kako je znamenka stotica 0, zaključujemo da dvoznamenkasti završetak našega broja mora biti djeljiv s 8. Dakle, $\overline{ab}$ višekratnik je broja 8.
Prirodni je broj djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9 pa $8 + a + b$ mora biti broj djeljiv s 9.
Gornja dva uvjeta zadovoljava samo broj 64. Umnožak znamenaka toga broja je 24.

7. [Srbija] Luka ima pse, zečeve i mačke. Osam njegovih ljubimaca nisu psi. Pet njegovih ljubimaca nisu zečevi. Sedam njegovih ljubimaca nisu mačke. Koliko ljubimaca ima Luka?

A) 10 B) 11 C) 15 D) 16 E) 20

Rješenje: A
Neka je P broj pasa, Z broj zečeva, a M broj mačaka koje Luka ima za ljubimce.
Vrijedi: $Z + M = 8$, $P + M = 5$, $P + Z = 7$.
Zbrojimo li ove tri jednakosti, dobivamo $2P + 2Z + 2M = 20$.
Dijeljenjem brojem 2 dobivamo ukupan broj Lukinih ljubimaca: $P + Z + M = 10$.

8. [Irak] Dana je kružnica radijusa 10 cm sa središtem u točki O. Unutar nje nacrtan je kvadrat $OPQR$, gdje je Q točka na kružnici. Odredi površinu osjenčanog trokuta PQR.

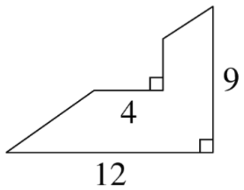


A) 12.5 cm² B) 25 cm² C) 50 cm² D) 75 cm² E) 100 cm²

Rješenje: B

Dužina $\overline{OQ}$ radijus je dane kružnice pa je njezina duljina 10 cm. Ona je ujedno i dijagonala kvadrata $OPQR$ pa će duljina njegove stranice biti $\frac{10}{\sqrt{2}}$ cm, a njegova površina $\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 = 50$ cm^2. Osjenčani trokut polovica je toga kvadrata pa je njegova površina 25 cm^2.

Pitanja za 4 boda:



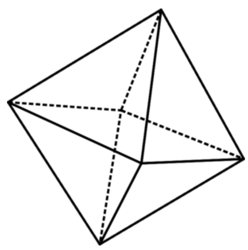
9. [Grčka] Šesterokut je napravljen tako da je iz velikog pravokutnog trokuta izrezan manji pravokutni trokut, kao na slici. Duljine kateta većeg trokuta su 12 i 9, a jedna kateta manjeg trokuta duljine je 4.
Odredi opseg ovog šesterokuta.

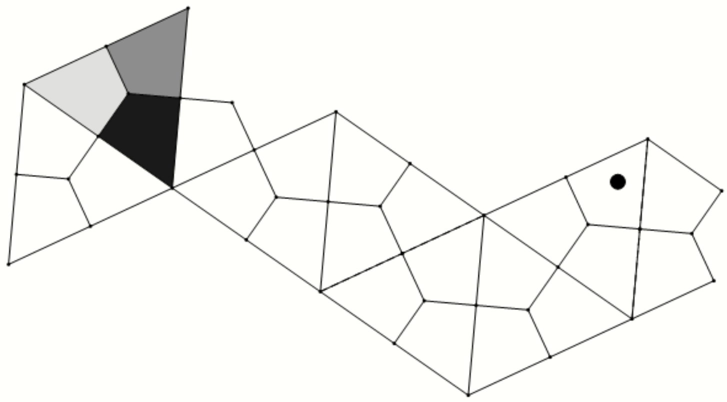
A) 28 B) 38 C) 42 D) 43 E) 48

Rješenje: B

Izrezani trokut sličan je velikome pa će njegova druga kateta biti duljine $\frac{4}{12} \cdot 9 = 3$.
Koristeći Pitagorin poučak računamo duljine hipotenuza ovih dvaju trokuta: 5 i 15.
Opseg šesterokuta tada je $12 + 9 + (15 - 5) + 3 + 4 = 38$.

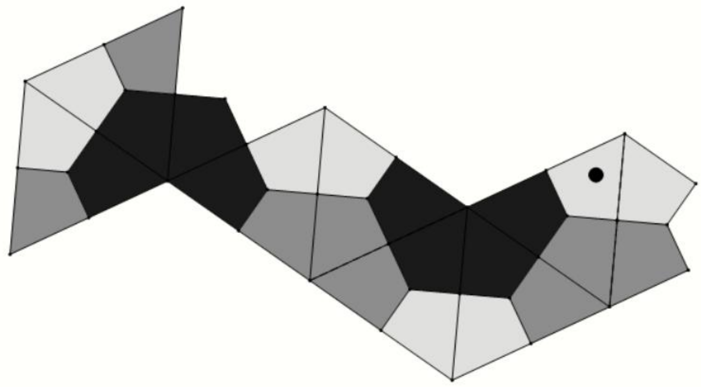
10. [Hrvatska] Na slici je mreža oktaedra. Svaka strana oktaedra podijeljena je na tri dijela. Oktaedar je obojen s tri boje (crna, tamno siva i svijetlo siva), i to tako da su dijelovi koji izlaze iz istog ili suprotnog vrha oktaedra jednake boje. Kojom bojom treba obojiti dio označen točkom?



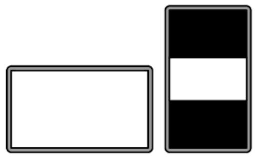


A) svijetlo sivom B) tamno sivom C) crnom D) bilo kojom bojom E) nemoguće je odrediti

Rješenje: A



11. [Njemačka] Na svome pametnom telefonu Ana gleda fotografiju. Format fotografije je $16 : 9$ te ona zauzima cijeli zaslon. Kada Ana zarotira telefon, fotografija se smanji. Koji je dio zaslona fotografija sada zauzela?

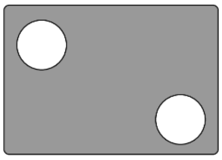


A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{9}{16}$ C) $\frac{27}{64}$ D) $\frac{32}{81}$ E) $\frac{81}{256}$

Rješenje: E

Označimo s a dulju stranicu zaslona, a s b kraću stranicu zaslona. Prema lijevoj slici vrijedi $a : b = 16 : 9$. Prema desnoj slici vrijedi $b : x = 16 : 9$, gdje je x kraća stranica fotografije na desnoj slici.

Omjer površina ovih dviju fotografija je $\frac{b \cdot x}{a \cdot b} = \frac{x}{a} = \frac{\frac{9}{16}b}{a} = \frac{9}{16} \cdot \frac{b}{a} = \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{81}{256}$, a to je ujedno i dio zaslona koji zauzima fotografija na desnoj slici.



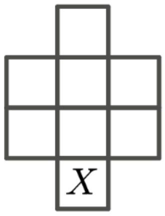
12. [Njemačka] Pavla je ukupno 27 puta loptom gađala dvije rupe. Uspješno je bilo 50 % pokušaja gađanja rupe gore lijevo i 80 % pokušaja gađanja rupe dolje desno. Ukupno je imala 9 promašaja. Koliko je puta Pavla ciljala i pogodila rupu gore lijevo?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Rješenje: C

Neka je x broj pokušaja gađanja rupe gore lijevo, a y broj pokušaja gađanja rupe dolje desno. Tada vrijedi da je $x + y = 27$ i $\frac{50}{100}x + \frac{20}{100}y = 9$. Iz ovog sustava slijedi da je $x = 12$. Pavla je 12 puta gađala rupu gore lijevo, a pogodila ju je u 50 % pokušaja, tj. 6 puta.

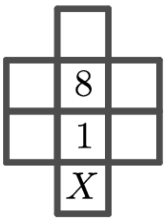
13. [Katalonija] David želi prirodne brojeve od 1 do 8 smjestiti u dijagram na slici, jedan broj u svaku ćeliju. Želi da ćelije koje sadrže dva uzastopna broja ne dijele stranicu niti vrh. Koje brojeve David može smjestiti u ćeliju označenu s X?



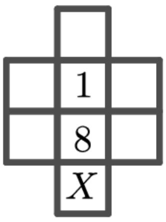
A) 1 ili 8 B) 2 ili 7 C) 3 ili 6 D) 4 ili 5 E) 7 ili 8

Rješenje: B

Brojevi u središnjim ćelijama moraju biti oni koji imaju najmanje susjeda, 1 i 8:



ili



.

Lijeva slika: kako 7 ne može dijeliti stranicu niti vrh s 8, taj broj moramo smjestiti u ćeliju označenu s X.

Desna slika: kako 2 ne može dijeliti stranicu niti vrh s 1, taj broj moramo smjestiti u ćeliju označenu s X.

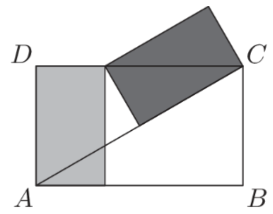
Rješenje je stoga 2 ili 7.

14. [Indonezija] Broj N najveći je šesteroznamenkasti broj kojemu umnožak svih znamenaka iznosi 180. Odredi zbroj znamenaka broja N.

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

Rješenje: A
Znamo da je $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Najveća znamenka koja se može stvoriti od faktora $2, 2, 3, 3$ i 5 je 9. Od preostalih znamenaka, najveća koja se može formirati je 5, a zatim 4.
Najveći šesteroznamenkasti broj sa zadanim svojstvom tada će biti 954111.
Zbroj znamenaka toga broja je 21.

15. [Kina] Dva su osjenčana pravokutnika sukladna. Površina svakoga od njih je 4. Kolika je površina pravokutnika $ABCD$ na slici?



A) 10 B) $8\sqrt{3}$ C) 8 D) 12 E) $4\sqrt{3}$

Rješenje: D
Pogledajmo dva mala pravokutna trokuta – svijetlo sivi dolje lijevo i bijeli po sredini. Oni su sukladni po poučku KSK (jedna im je kateta iste duljine kao kraća stranica osjenčanih pravokutnika, pravi kut, vršni kutovi). Onda je površina trokuta ACD jednaka zbroju površine svjetlijeg pravokutnika i polovice površine tamnijeg pravokutnika: $4 + 2 = 6$. Površina pravokutnika $ABCD$ tada je 12.

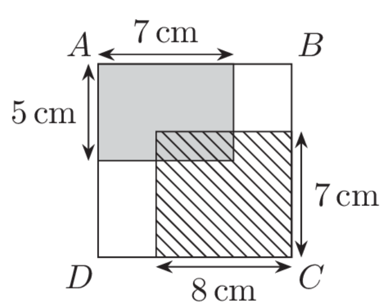
16. [Gruzija] Umnožak triju prostih brojeva 11 je puta veći od njihova zbroja. Odredi najveću moguću vrijednost toga zbroja.

A) 14 B) 17 C) 21 D) 25 E) 26

Rješenje: E
Neka su p, q i r prosti brojevi za koje vrijedi $pqr = 11(p + q + r)$. Jedan od ta tri prosta broja mora biti 11 pa dobivamo $pq = p + q + 11$. Sredimo ovu jednakost:
$$pq - p - q + 1 = 12 \Rightarrow p(q-1) - (q-1) = 12 \Rightarrow (q-1)(p-1) = 12$$
Iz $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ vidimo da su moguća dva rješenja: 2 i 13 ili 3 i 7.
Ako se radi o brojevima $2, 11, 13$, njihov je zbroj 26.
Ako se radi o brojevima $3, 7, 11$, njihov je zbroj 21.
Najveća moguća vrijednost zbroja je 26.

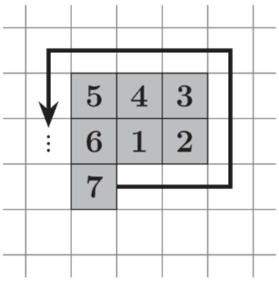
Pitanja za 5 bodova:

17. [Bugarska] Kvadrat $ABCD$ sadrži dva pravokutnika, kao na slici. Površina dijela na kojemu se ti pravokutnici preklapaju iznosi 18 cm^2. Odredi opseg kvadrata $ABCD$.



A) 28 cm B) 34 cm C) 36 cm D) 38 cm E) 40 cm

Rješenje: C
Neka je x duljina stranice kvadrata $ABCD$. Tada su duljine stranica dijela na kojemu se pravokutnici preklapaju $(5 + 8 - x)$ cm i $(7 + 8 - x)$ cm. Kako je površina toga dijela 18 cm^2, dobivamo jednadžbu $(13 - x)(15 - x) = 18$, tj. $x^2 - 27x + 162 = 0$, čija su rješenja 18 i 9. Kada bi x bio 18, ne bi bilo preklapanja pravokutnika pa je jedino prihvatljivo rješenje $x = 9$. Opseg kvadrata $ABCD$ je 36 cm.



18. [Austrija] Danijel je uzeo list papira na kvadratiće stranice duljine 0.5 cm te počeo numerirati kvadratiće: 1, 2, 3, 4, … u smjeru obrnutom od kazaljke na satu, kao što je prikazano na slici.
Stao je kada je numerirao 2025 kvadratića pa pogledao koji lik tvore svi numerirani kvadratići.
Koliki je opseg toga lika?

A) 25 cm B) 45 cm C) 80 cm D) 90 cm E) 180 cm

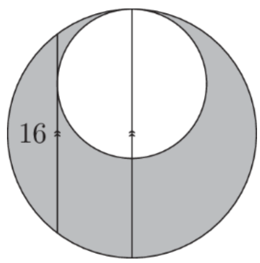
Rješenje: D
U određenim koracima numerirani kvadratići tvore kvadrat. Tražimo najveći prirodni kvadrat manji ili jednak broju 2025. Kako je $45^2 = 2025$, lik koji će Danijel vidjeti nakon 2025 napisanih brojeva kvadrat je stranice duljine 45 kvadratića, tj. $45 \cdot 0.5$ cm. Njegov će opseg biti 90 cm.

19. [Kina] Od znamenaka 1, 2, 3, 4, 5 i 6 sastavljen je broj $\overline{ABCDEF}$ (bez ponavljanja znamenaka). Broj $\overline{AB}$ višekratnik je broja 2. Broj $\overline{ABC}$ višekratnik je broja 3. Broj $\overline{ABCD}$ višekratnik je broja 4. Broj $\overline{ABCDE}$ višekratnik je broja 5. Broj $\overline{ABCDEF}$ višekratnik je broja 6. Koja je znamenka jedinica F?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 2 ili 4 E) 4 ili 6

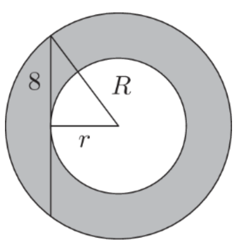
Rješenje: B
Zbog djeljivosti broja $\overline{ABCDE}$ brojem 5 znamo da je $E = 5$.
Znamenke B, D, F su parne, dakle $2, 4, 6$. Znamenke A, C su onda $1, 3$.
Da bi broj $\overline{ABC}$ bio djeljiv s 3, zbroj $A + B + C$ mora biti djeljiv s 3, a to će biti moguće samo za $B = 2$. Da bi broj $\overline{ABCD}$ bio djeljiv s 4, broj $\overline{CD}$ mora biti djeljiv s 4. Kako je C znamenka 1 ili 3, slijedi da je $D = 6$. Preostaje samo $F = 4$.

20. [Kina] Pogledaj sliku. Promjer unutarnje kružnice leži na promjeru vanjske kružnice. Tetiva vanjske kružnice duljine je 16, paralelna je s istaknutim promjerom te leži na tangenti unutarnje kružnice. Odredi površinu osjenčanog dijela.



A) 36π B) 49π C) 64π D) 81π E) Ne može se odrediti.

Rješenje: C
Neka je R polumjer velikog, a r polumjer malog kruga. Površina osjenčanog dijela tada je $(R^2 - r^2)\pi$.



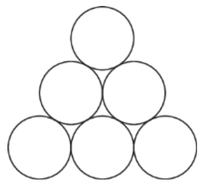
Pomaknemo li mali krug tako da mu središte bude isto kao središte velikog kruga, kao na slici lijevo, nećemo promijeniti površinu osjenčanog dijela.
Iz Pitagorina poučka sada slijedi da je $R^2 - r^2 = 8^2$, što znači da je površina osjenčanog dijela $8^2\pi = 64\pi$.

21. [Katalonija] Niz $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ takav je da je svaki član niza nakon drugog prosjek svih prethodnih članova. Dakle, a_3 prosjek je brojeva a_1 i a_2, a_4 prosjek je brojeva a_1, a_2 i a_3, itd. Ako je $a_1 = 8$ i $a_{10} = 26$, koliko iznosi a_2?

A) 28 B) 32 C) 38 D) 44 E) 50

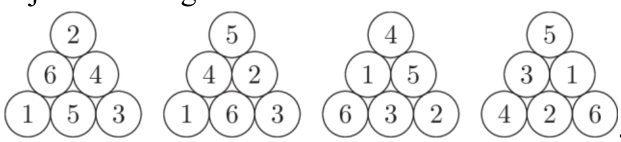
Rješenje: D
Imamo:
$a_3 = \frac{a_1+a_2}{2}$
$a_4 = \frac{a_1+a_2+a_3}{3} = \frac{a_1+a_2+\frac{a_1+a_2}{2}}{3} = \frac{a_1+a_2}{2}$.
Primijetimo sada da će svaki sljedeći član biti isti, $\frac{a_1+a_2}{2}$, pa je i $a_{10} = \frac{a_1+a_2}{2}$, iz čega slijedi $a_2 = 44$.

22. [Bjelorusija] Šest je krugova složeno u obliku trokuta, kao na slici. Ivan je unutar krugova upisao prirodne brojeve od 1 do 6 tako da zbroj brojeva na svakoj od strana trokuta bude isti. Zatim je zbrojio brojeve koji se nalaze u vrhovima trokuta. Koliko je različitih zbrojeva Ivan na ovaj način mogao dobiti?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: D
Neka je S zbroj brojeva na svakoj strani.
Zbroj šest upisanih brojeva je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.
Zbroj brojeva u vrhovima trokuta može biti najmanje $1 + 2 + 3 = 6$, a najviše $4 + 5 + 6 = 15$.
U zbroj brojeva na stranama svaki je vrh uključen dva puta. Stoga je $21 + 6 \le 3S \le 21 + 15$, tj. $27 \le 3S \le 36$, iz čega zaključujemo da S može biti $9, 10, 11$ ili 12.
Njih ćemo dobiti ako je zbroj brojeva u vrhovima trokuta redom $6, 9, 12, 15$.
Evo i primjera da su sve te vrijednosti moguće:

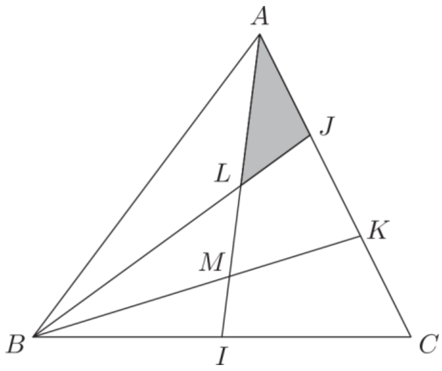


23. [Vijetnam] Na zabavi je dvanaestero djece, uključujući tri para blizanaca. Na koliko načina možemo djeci podijeliti šest jednakih plavih i šest jednakih crvenih šešira tako da u svakom paru blizanaca oboje djece nosi šešir iste boje?

A) 72 B) 86 C) 92 D) 102 E) 132

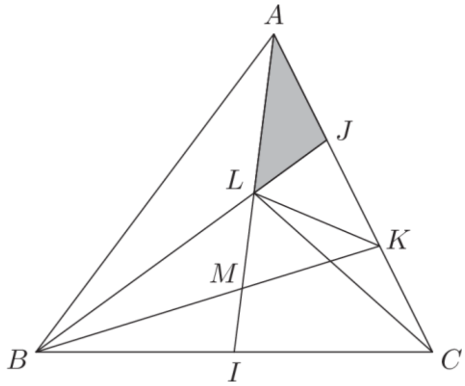
Rješenje: C
Slučaj 1: svi blizanci dobiju šešire iste boje. Ovdje imamo dvije mogućnosti – blizanci dobiju crvene šešire, a svi ostali plave ili, obrnuto, blizanci dobiju plave šešire, a svi ostali crvene.
Slučaj 2: Točno dva para blizanaca imaju šešire iste boje.
To možemo učiniti na 6 načina (PPC, CCP, PCP, CPC, CPP, PCC). Ostale šešire treba podijeliti ostaloj djeci, njih 6. U svakom od tih načina ostat će nam dva šešira jedne i četiri šešira druge boje. Dva šešira jedne boje možemo raspodijeliti na 15 načina (prvi na 6 načina, drugi na 5 načina, no sve dijelimo brojem 2 jer nam redoslijed podjele nije bitan: $\frac{6\cdot 5}{2}$). Preostala četiri šešira druge boje damo preostaloj djeci. Tako smo dobili $6 \cdot 15 = 90$ načina raspodjele šešira.
Ukupno imamo $2 + 90 = 92$ načina raspodjele.

24. [Sirija] Trokut ABC ima površinu 60. Točka I polovište je stranice $\overline{BC}$. Točke J i K dijele stranicu $\overline{AC}$ na tri jednaka dijela. Točka L presjek je dužina $\overline{AI}$ i $\overline{BJ}$. Odredi površinu trokuta JAL.



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Rješenje: B



Dva trokuta imaju jednaku površinu ako se podudaraju u jednoj stranici i visini na tu stranicu.
Primijetimo da trokuti JAL, KJL i CKL imaju jednake površine pa označimo tu površinu s x.
Trokuti BIL i CIL također imaju jednake površine, označimo je s y.
Površina cijelog trokuta je 60 pa znamo da je $P_{\Delta BIA} = P_{\Delta ICA} = 30$, što nam daje jednadžbu $3x + y = 30$.
Također znamo da je $P_{\Delta AJB} = P_{\Delta JKB} = P_{\Delta KCB} = 20$ pa, gledajući trokut BCJ, imamo jednadžbu $2x + 2y = 40$.
Rješenje ovog sustava je $(x, y) = (5,15)$.
Površina trokuta JAL je, dakle, 5.

Obavijesti o rezultatima mogu se naći na mrežnim stranicama HMD-a.
http://www.matematika.hr/klokan/2025/