MATEMATIČKI KLOKAN 2025.

RJEŠENJA ZADATAKA

C

Pitanja za 3 boda

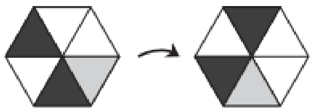
1. [Austrija] Ana ima četiri drvene znamenke kojima može složiti broj 2025. Koji je od navedenih brojeva najveći mogući broj koji se može složiti tim znamenkama?

A) 2502 B) 5202 C) 5220 D) 5502 E) 5520

Rješenje: C

Najveći broj dobije se ako se znamenke poredaju od najveće do najmanje, tj. u poretku 5220.

2. [Njemačka] Paula vrti prikazani list papira šesterokutnog oblika. Svaka rotacija vrti list za isti kut u istom smjeru. Slika prikazuje rezultat jedne rotacije. Koliki je broj rotacija potreban da bi list došao u početni položaj?

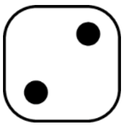


A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Rješenje: E

Nakon svakog broja rotacija djeljivog sa 6, list papira stajat će identično kao na početku. U ponuđenim odgovorima to je jedino broj 12.

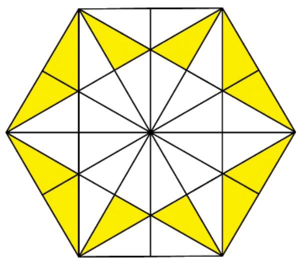
3. [Norveška] Iva je bacila tri igraće kockice i ukupno dobila zbroj 8. Ako je na sve tri kockice dobila različite brojeve, što nije mogla dobiti niti na jednoj od kockica?

A)  B)  C)  D)  E) 

Rješenje: E

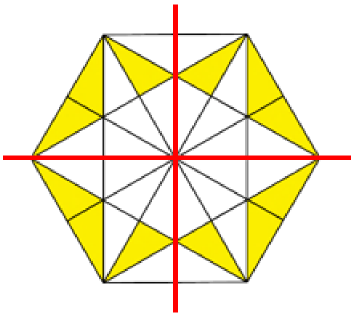
Zbroj 8 može se dobiti pomoću tri različita pribrojnika iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ na dva različita načina: $8 = 5 + 2 + 1$ i $8 = 4 + 3 + 1$. To znači da niti na jednoj od kockica nije mogla dobiti 6.

4. [Maroko] Prikazani pravilni šesterokut podijeljen je na više trokuta iste površine. Koliki je dio toga šesterokuta osjenčan?



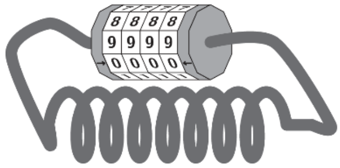
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Rješenje: B



Prikazani pravilni šesterokut je simetričan, pa je dovoljno promatrati njegovu četvrtinu.
Četvrtina toga lika podijeljena je na 9 trokuta jednakih površina, od čega su tri osjenčana. Stoga je i u cijelom liku isti udio osjenčanih trokuta.

$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$



Napomena: Zadatak se može riješiti i bez korištenja simetrije.

Ovaj pravilni šesterokut podijeljen je na 36 trokuta jednakih površina, od čega je njih 12 osjenčano. Udio osjenčanih je $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$.

5. [Ujedinjeno Kraljevstvo] Koliko ima skupina od 12 minuta u 12 sati?

A) 60 B) 24 C) 12 D) 10 E) 6

Rješenje: A

U jednom satu ima 60 : 12 = 5 skupina po 12 minuta. To znači da u 12 sati ima 12 · 5 = 60 skupina po 12 minuta.

6. [Njemačka] Drago želi napisati četiri znamenke: 2, 0, 2 i 5, u četiri polja prikazanog računa. Koji najmanji rezultat Drago može dobiti?

$\square - \square + \square - \square$

A) –7 B) –6 C) –5 D) –4 E) –3

Rješenje: C

Najmanji će rezultat dobiti ako su brojevi koje oduzima najveći mogući. U ovom slučaju to su brojevi 5 i 2. Redoslijed brojeva koje zbraja kao ni redoslijed onih koje oduzima nije bitan pa najmanje može dobiti 2 – 2 + 0 – 5 = –5.

7. [SAD] U sobi ima deset osoba više koje govore istinu nego što ima lažljivaca. Na pitanje: „Jeste li govorili istinu?“, svi su dali odgovor. Ukupno je 20 osoba odgovorilo „Da“. Koliko je lažljivaca u sobi?

A) 0 B) 5 C) 15 D) 20 E) 25

Rješenje: B

Svaka osoba u sobi dala je odgovor. Na pitanje: „Jeste li govorili istinu?“, i lažljivci i oni koji govore istinu odgovaraju: „Da“, pa je u sobi ukupno 20 osoba. To znači da je broj lažljivaca 5, a onih koji govore istinu 15.

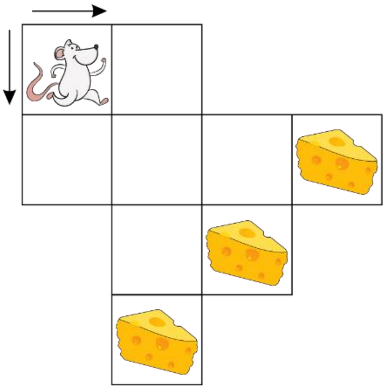
8. [Turska] Šifra za otvaranje brave bicikla je 0000. No, kad netko pogleda otvorenu bravu odozgo, vidjet će 8888. Kad Roč pogleda odozgo otvorenu bravu svoga prijatelja, vidi šifru 2815. Koja je šifra za otvaranje brave bicikla Ročevog prijatelja?

A) 4037 B) 4693 C) 0639 D) 0693 E) 9603

Rješenje: A

Kad se otvorena brava pogleda odozgo, vidi se šifra čija je svaka znamenka na dvije pozicije unatrag od odgovarajuće znamenke šifre koja otvara bravu. To znači da svaku znamenku šifre koju vidi Roč treba povećati za 2, odnosno šifra koja otvara bravu bicikla Ročevog prijatelja je 4037.

Pitanja za 4 boda



9. [Vijetnam] Miš Miško želi doći do komada sira. U susjedna polja prelazi krećući se ili vertikalno prema dolje ili horizontalno udesno, kako pokazuju strelice na slici. Na koliko različitih načina Miško može doći do nekog komada sira?

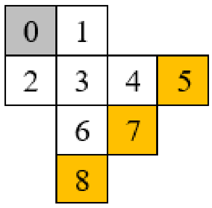
A) 3 B) 5

C) 8 D) 10

E) 11

Rješenje: C

Označimo polja na ovaj način:



Do polja 3 može doći na dva načina: 0-1-3 ili 0-2-3. Od polja 3 do sira u polju 7 može doći na dva načina: 3-6-7 ili 3-4-7. To znači da do sira u polju 7 može doći na $2 \cdot 2 = 4$ različita načina.

Do sira koji se nalazi u polju 5 dolazi preko polja 3 na jedan način: 3-4-5, kao i do sira u polju 8 do kojeg od 3 dolazi na način 3-6-8. To znači da do sira u polju 5 može doći na dva različita načina, kao i do sira u polju 8.

Do sira može doći na ukupno $4 + 2 + 2 = 8$ različita načina.

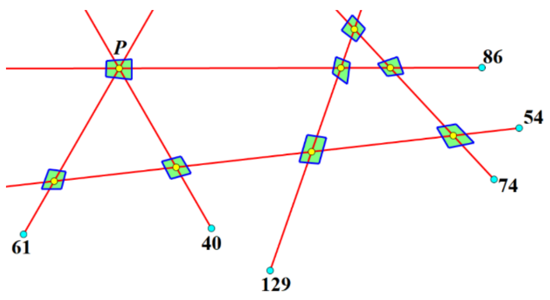
10. [Uganda] U utrci s preponama na 60 m ima pet prepona. Prva je nakon 12 m. Razmak između bilo koje dvije uzastopne prepone je 8 m. Koliko je posljednja prepona udaljena od cilja?

A) 16 m B) 14 m C) 12 m D) 10 m E) 8 m

Rješenje: A

Peta prepona nalazi se na $12 + 4 \cdot 8 = 44$ m od starta, odnosno na $60 – 44 = 16$ m od cilja.

11. [Hrvatska] Na planu grada označeno je šest ulica i osam parkova. U parkovima su postavljeni QR kodovi koji daju informacije o biljkama ili životinjama koje žive na tome mjestu. Kod svake je ulice označen ukupan broj QR kodova u parkovima koji se nalaze u toj ulici. Broj QR kodova u nekom parku jedan je od prvih osam kvadrata prirodnih brojeva, a svi parkovi imaju različit broj QR kodova. Koliko ima QR kodova u parku P?



A) 16 B) 25 C) 36 D) 49 E) 64

Rješenje: C

Uočimo da je samo park *P* smješten u tri istaknute ulice.

Označimo broj QR kodova u tome parku s *p*.

$p \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64\}$.

61 + 40 + 129 + 74 + 54 + 86 = 444

U dobivenom zbroju, broj QR kodova u svakom je parku zbrojen dva puta, osim onih iz parka *P* koji su zbrojeni tri puta.

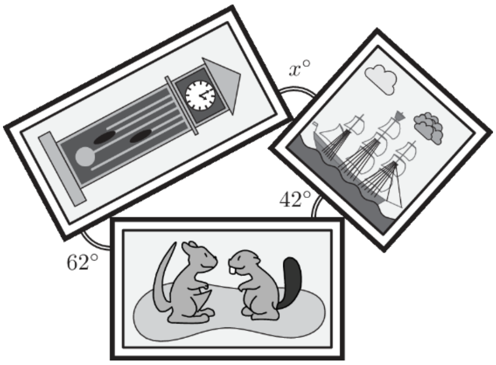
Budući da je 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204, vrijedi:

$2 \cdot 204 = 444 - p$

$408 = 444 - p$

$p = 36$

12. [Taiwan] Vjeran je postavio tri pravokutne slike na prikazani način. Kolika je vrijednost *x*?



A) 64 B) 70

C) 72 D) 76

E) 80

Rješenje: B

$\beta = 90° - x$

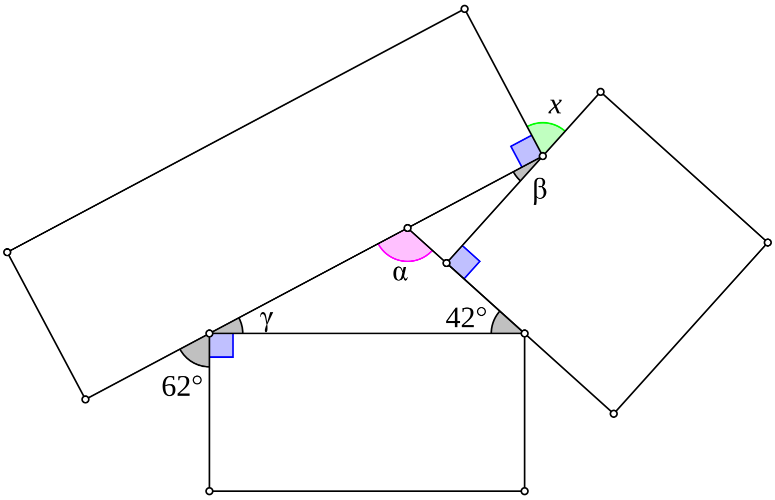
$\alpha = 90° + \beta = 90° + 90° - x = 180° - x$

$\gamma = 90° - 62° = 28°$

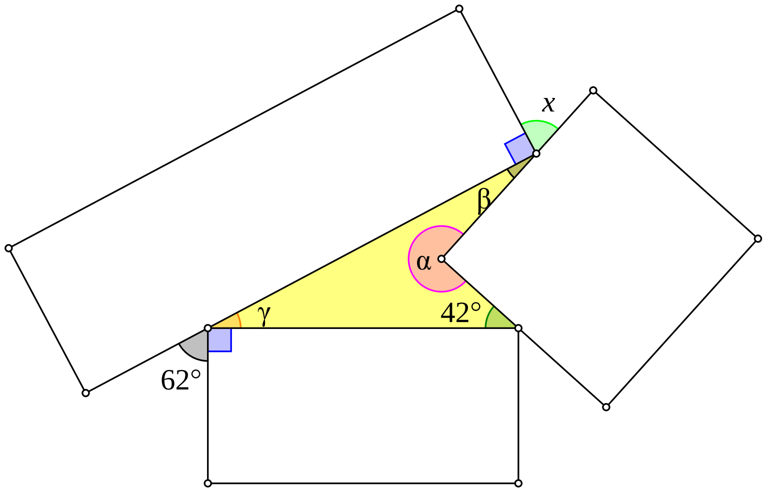
$180° - x + 28° + 42° = 180°$

$x = 28° + 42°$

$x = 70°$



ili



$\beta = 90° - x$

$\alpha = 270°$

$\gamma = 90° - 62° = 28°$

$$28° + 42° + 270° + 90° - x = 360°$$
$$x = 430° + 360°$$
$$x = 70°$$

13. [Španjolska] Željko je u teretani na traci za trčanje. Stalno gleda na dvije štoperice. Prva prikazuje vrijeme u minutama i sekundama proteklo od početka serije, a druga vrijeme preostalo do kraja serije.

14:58	**21:32**

U jednom trenutku obje štoperice pokazuju isto očitanje. Što prikazuju u tome trenutku?

A) 17:50 B) 18:00 C) 18:12 D) 18:15 E) 18:20

Rješenje: D

Razlika u vremenu koje pokazuju prva i druga štoperica je 21:32 – 14:58 = 6:34. To znači da će pokazati isto vrijeme nakon 3 minute i 17 sekundi. Ako prvoj dodamo ili drugoj oduzmemo 3:17, dobit ćemo 18:15.

14. [Filipini] Ivona u svaki $\square$ želi upisati prost broj manji od 20 tako da svi upisani brojevi budu međusobno različiti i da vrijednost *A* bude cjelobrojna. Koju najveću moguću vrijednost *A* može dobiti?

$$A = \frac{\square + \square + \square + \square + \square + \square + \square}{\square}$$

A) 20 B) 14 C) 10 D) 8 E) 6

Rješenje: C

Prosti brojevi manji od 20 su: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, a njihov je zbroj 77.

A će imati cjelobrojnu vrijednost ako je 77 – *p* djeljivo s *p* za $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, a ta će vrijednost biti najveća moguća za *p* koji je najmanji moguć.

77 – 2 = 75, što nije djeljivo s 2

77 – 3 = 74, što nije djeljivo s 3

77 – 5 = 72, što nije djeljivo s 5

77 – 7 = 70, što je djeljivo sa 7 pa je najveća moguća vrijednost $A = \dfrac{2+3+5+11+13+17+19}{7} = 10.$

Napomena: A može imati cjelobrojnu vrijednost još samo za p = 11, tj. $A = \frac{77-11}{11} = 6$.

15. [Canada] Sanja ima dvije posude kuglica s brojevima. Posuda X sadrži sedam kuglica označenih brojevima 1, 2, 6, 7, 10, 11 i 12. Posuda Y sadrži pet kuglica označenih brojevima 3, 4, 5, 8 i 9. Koju kuglicu Sanja treba prebaciti iz posude X u posudu Y kako bi se povećao prosječan broj na kuglicama u svakoj posudi?

A) 6 B) 7 C) 10 D) 11 E) 12

Rješenje: A

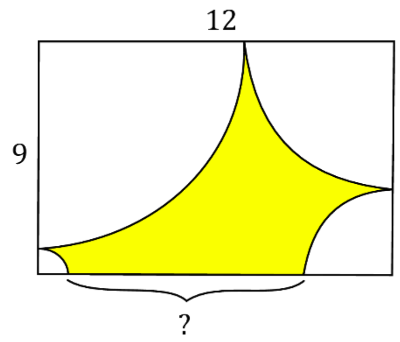
Prosjek brojeva u posudi X je $\bar{x} = \frac{1+2+6+7+10+11+12}{7} = \frac{49}{7} = 7$.

Prosjek brojeva u posudi Y je $\bar{y} = \frac{3+4+5+8+9}{5} = \frac{29}{5} = 5.8$.

Kako bismo povećali prosjek u svakoj zdjeli, potrebno je iz posude X uzeti kuglicu s brojem manjim od prosjeka $\bar{x}$ i većim od prosjeka $\bar{y}$ i tu kuglicu premjestiti u zdjelu Y.

Jedini broj x iz posude X za koji vrijedi $5.8 < x < 7$ je broj 6.

16. [SAD] Antonijo je crtao četvrtinu kruga sa središtem u svakom od vrhova zastave pravokutnog oblika dimenzija 12 cm x 9 cm i osjenčao dobiveni dio kao što je prikazano na slici. Kolika je duljina označena znakom upitnik?



A) 5 cm B) 6 cm C) 7 cm D) 8 cm E) 9 cm

Rješenje: B

Budući da je zastava pravokutnik, nasuprotne stranice jednakih su duljina.

Uočimo kako je zbroj duljina polumjera svih četiriju kružnica jednak dvostrukoj duljini kraće stranice, odnosno 18 cm.

Također vrijedi da je zbroj duljina polumjera svih četiriju kružnica uvećan za duljinu ? jednak dvostrukoj duljini dulje stranice, tj. 24 cm.

? + 18 = 24, pa je duljina označena znakom ? jednaka 6 cm.

Pitanja za 5 bodova

17. [Ujedinjeno Kraljevstvo] U šesteroznamenkastom broju *PAPAYA* različita slova predstavljaju različite, a jednaka slova jednake znamenke. Ako vrijedi $Y = P + P = A + A + A$, koliko je $P \cdot A \cdot P \cdot A \cdot Y \cdot A$?

A) 432 B) 342 C) 324 D) 243 E) 234

Rješenje: A

Kako je $Y = 2P$ i $Y = 3A$, zaključujemo da je znamenka Y djeljiva s 2 i s 3 pa je djeljiva sa 6. Jedina takva znamenka je 6. Stoga je $P = 3$, a $A = 2$.

$P \cdot A \cdot P \cdot A \cdot Y \cdot A = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 = 432$

18. [Njemačka] Tijekom dvaju nogometnih treninga Domagoj ukupno 17 puta puca prema golu. Od udaraca koje izvede tijekom prvog treninga, gol pogodi njih 60 %. Od udaraca koje izvede tijekom drugog treninga, gol pogodi njih 75 %. Koliko je puta pogodio gol tijekom drugog treninga?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Rješenje: D

Kako je na prvom treningu broj pogodaka jednak $60\ \% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ od udaraca izvedenih tijekom tog treninga, a broj udaraca mora biti cjelobrojan, zaključujemo da je na prvom treningu broj udaraca višekratnik broja 5 koji je manji od 17. To znači da je Domagoj na prvom treningu na gol pucao 0, 5, 10 ili 15 puta.

Onda je na drugom treningu na gol pucao 17 – 0 = 17, 17 – 5 = 12, 17 – 10 = 7 ili 17 – 15 = 2 puta.

No, na drugom treningu broj pogodaka jednak je $75\ \% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ od udaraca izvedenih na tom treningu, a kako broj udaraca mora biti cijeli broj, znači da je na drugom treningu broj udaraca višekratnik broja 4. Jedina mogućnost je da je na drugom treningu 12 puta pucao na gol, a to znači da je pogodio $\frac{3}{4}$ od 12 = 9 puta.

19. [SAD] Tome svaki dan kreće u školu u isto vrijeme. Stanuje 1 km od škole. Tome hoda brzinom od 4 km/h, a bicikl vozi brzinom od 15 km/h. Kad hoda, stigne 5 minuta ranije. Koliko minuta ranije dođe u školu ako vozi bicikl?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Rješenje: E

Kako Tome stanuje 1 km od škole, ako hoda brzinom od 4 km/h, onda mu za put od 1 km treba četvrtina sata, odnosno 15 minuta. Znači da u školu stigne u 15 minuta nakon što je krenuo od kuće, što je 5 minuta prije početka nastave, tj. nastava počinje 20 minuta nakon što Tome pješke krene od kuće.

Kako bicikl vozi brzinom od 15 km/h, onda mu za 1 km do škole treba petnaestina sata, tj. 60 : 15 = 4 minute. U tom slučaju u školu stigne 4 minute nakon što je biciklom krenuo od kuće, što je 16 minuta ranije.

20. [Ujedinjeno Kraljevstvo] Sa p, q, r, s i t označeno je pet uzastopnih cijelih brojeva, ne nužno u tom redoslijedu. Ako je zbroj p i q jednak 69, a zbroj s i t je 72, koliko je r?

A) 29 B) 31 C) 34 D) 37 E) 39

Rješenje: C

Kako je tih pet brojeva uzastopno, onda je najveća razlika među njima jednaka 4. Broj 69 je neparan pa je nastao zbrajanjem jednog parnog i jednog neparnog broja. Razlika parnog i neparnog broja uvijek je neparan broj, a budući da je razlika najviše 4, slijedi da se ta dva broja razlikuju ili za 1 ili za 3.

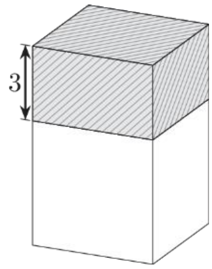
(69 – 1) : 2 = 34, a (69 – 3) : 2 = 33 pa to mogu biti 34 i 35 ili 33 i 36.

Broj 72 dobiven je ili kao zbroj dvaju parnih brojeva ili kao zbroj dvaju neparnih brojeva. U oba slučaja njihova je razlika paran broj, a budući da je razlika najviše 4, ti se brojevi razlikuju ili za 2 ili za 4.

(72 – 2) : 2 = 35, a (72 – 4) : 2 = 34 pa to mogu biti 35 i 37 ili 34 i 38.

Sad uočavamo da je jedina mogućnost za četiri od pet brojeva 33, 35, 36 i 37 jer su svi različiti, 33 + 36 = 69, a 35 + 37 = 72 i nedostaje točno jedan broj da bi bili uzastopni. Zato je $r = 34$.

21. [Kina] Kad se visina kvadra smanji za 3 cm, njegovo se oplošje smanji za 60 cm^2, a dobiveno tijelo je kocka. Koliki je obujam početnog kvadra izražen u kubičnim centimetrima?



A) 75 B) 125 C) 150 D) 200 E) 225

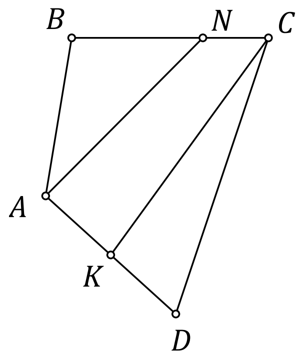
Rješenje: D

Kako se smanjenjem visine kvadra dobije kocka, zaključujemo da je baza toga kvadra kvadrat. Ako je baza kvadrat duljine stranica x cm, onda se oplošje početnog kvadra smanjilo za površinu četiriju pravokutnika čije su stranice duljina x cm i 3 cm, tj. vrijedi:

$4 \cdot 3x = 60$, odnosno $x = 5$ cm.

Početni kvadar ima visinu 5 + 3 = 8 cm pa mu je obujam $25 \cdot 8 = 200$ cm^3.

22. [Rusija] U četverokutu $ADCB$ na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ označene su redom točke N i K tako da je $|BN| = 2|NC|$ i $|AK| = |KD|$. Površina trokuta CKD je 2, a površina trokuta ANB je 6. Kolika je površina četverokuta $ADCB$?



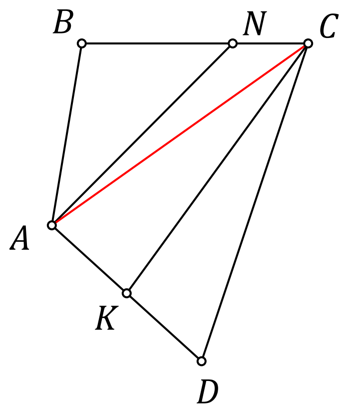
A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Rješenje: A

Promotrimo ΔANB i ΔACN. Ti trokuti imaju istu visinu, a za njihove osnovice vrijedi $|BN| = 2|NC|$, pa je površina $\Delta ACN = 6 : 2 = 3$.

Kako je $|AK| = |KD|$, a ΔAKC i ΔKDC imaju istu visinu, onda su im i površine jednake i obje iznose 2.

Sada je $P_{ADCB} = P_{ANB} + P_{ACN} + P_{AKC} + P_{KDC} = 6 + 3 + 2 + 2 = 13$.



23. [Vijetnam] Jato ptica sjedi na četiri paralelne žice. Među njima su i ptice Ha, Lo, Na i Ta. Iznad Ha sjedi 10 ptica, a iznad Lo 25 ptica. Ispod Na sjedi pet ptica, a ispod Ta dvije. Broj ptica koje sjede iznad ptice Ta višekratnik je broja ptica koje sjede ispod nje. Koliko ukupno ptica sjedi na te četiri žice?

A) 27 B) 30 C) 32 D) 37 E) 40

Rješenje: A

Označimo žice odozgo prema dolje brojevima 1, 2, 3 i 4.

1

2

3

4

i) Budući da ima više ptica iznad Lo nego iznad Ha, onda Lo sjedi na nekoj žici ispod Ha, a kako iznad Ha ima nekih ptica, onda Ha ne može sjediti na žici broj 1. Na isti način zaključujemo da Ta sjedi na nekoj žici ispod Na pa ptica Ta ne može sjediti na žici broj 4.

i	**Ha**	**Lo**	**Ta**	**Na**
1	X	X	X	
2		X		
3				X
4	X		X	X

ii) Kako iznad Ha ima 10 ptica, a iznad Lo 25 ptica, onda je najmanje 15 ptica na žici ptice Ha ili ispod nje. Kad bi ptica Na bila iznad ptice Ha, onda bi tih 15 ptica bilo ispod Na, no ispod Na sjedi 5 ptica tako da Na ne može biti iznad Ha. To znači da Na mora biti na žici 2 koju dijeli s Ha jer su jedino na taj način ispunjeni uvjeti zadatka. Posljedično, ptica Ta mora biti na žici broj 3.

ii	**Ha**	**Lo**	**Ta**	**Na**
1	X	X	X	X
2		X	X	
3	X			X
4	X		X	X

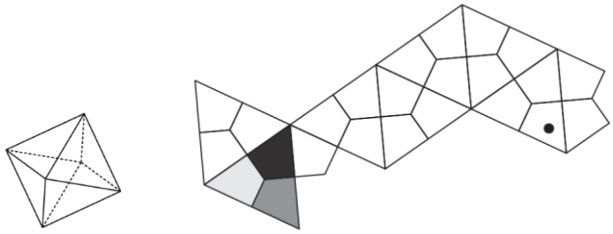
iii) Lo ne može biti na istoj žici na kojoj je Ta jer bi onda i ptica Ta imala 25 ptica iznad sebe, a to nije višekratnik broja 2. Zato je ptica Lo na žici broj 4.

iii	**Ha**	**Lo**	**Ta**	**Na**
1	X	X	X	X
2		X	X	
3	X	X		X
4	X		X	X

Kako je Ta na žici broj 3, a Lo na žici broj 4, onda na žici broj 4 mora biti još jedna ptica jer ispod Ta sjede dvije ptice. Iznad Lo je 25 ptica i one sjede na žicama 1, 2 i 3 pa je ukupno 27 ptica na tim žicama.

Konkretno, na žici broj 4 sjede **dvije** ptice, Lo i još jedna; na žici broj 3 sjede **tri** ptice, Ta i još dvije; na žici broj 2 sjedi **dvanaest** ptica, Ha, Na i još 10; a na žici broj 1 sjedi **deset** ptica.

24. [Hrvatska] Desna slika prikazuje mrežu oktaedra kojemu je svaka strana podijeljena na tri dijela. Ti dijelovi na stranama oktaedra obojeni su s tri boje – crnom, svijetlo sivom i tamno sivom, tako da su oni koji izlaze iz zajedničkog vrha oktaedra ili iz nasuprotnih vrhova oktaedra obojeni istom bojom. Kojom bi se bojom mogao obojiti dio označen točkom?



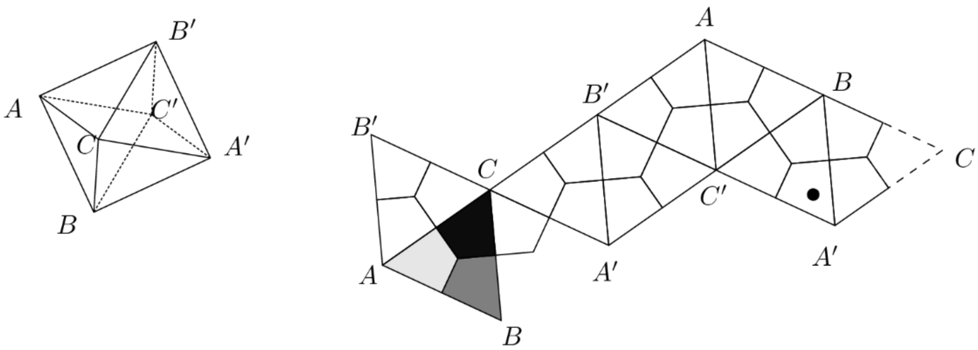
A) Samo crnom. B) Samo tamno sivom. C) Samo svijetlo sivom.

D) Moguće je s dvije boje, crnom ili tamno sivom.

E) Moguće je s dvije boje, crnom ili svijetlo sivom.

Rješenje: C

Neka je A' vrh oktaedra nasuprotan vrhu A, B' vrh nasuprotan vrhu B i C' vrh nasuprotan vrhu C. U skladu s time označimo i vrhove na mreži.



Kako je vrh iz kojeg izlazi dio označen točkom vrh A', a to je vrh nasuprotan vrhu A iz kojeg izlazi svijetlo sivo obojen dio označen na mreži, jedina mogućnost je svijetlo siva.

Prikažimo i bojenje cijele mreže: sve dijelove koji izlaze iz vrhova A i A' obojimo svijetlo sivo, one koji izlaze iz vrhova B i B' obojimo tamno sivo, a one koji izlaze iz vrhova C i C' obojimo crno.