

FORMULE – RJEŠENJE PROBLEMA ILI NAJVEĆI PROBLEM

10. kongres nastavnika matematike Republike Hrvatske

2. 7. 2024.

Zlata Hržina i Maja Zelčić



o nama

rad u prirodoslovno-
matematičkim razredima,
Gimnazija Lucijana Vranjanina
Zagreb

savjetnica i izvrsna savjetnica

organizatorice Lucka –
ekipnog natjecanja osnovnih
škola



Sažetak

- geometrija u nastavi Matematike
- samovrednovanje učitelja
- kvalitetna povratna informacija
- primjeri zadatka i postotak njihove riješenosti
- dijagnoza
- ima li lijeka?

Citat

“Nije da nisam uspio. Upravo sam otkrio deset tisuća načina koji ne funkcioniraju.”

Thomas Alva Edison

primjeri
zadataka i
postotci
njihove
riješivosti

- MAT liga, ekipno natjecanje učenika osnovnih i srednjih škola
- 96 učenika 1. razreda opće gimnazije Gimnazije Lucijana Vranjanina, Zagreb
 - ❑ 31 osnovna škola
 - ❑ 7. razred matematika 4.74
 - ❑ 8. razred matematika 4.80
 - ❑ upisani sa 76.15 bodova i više

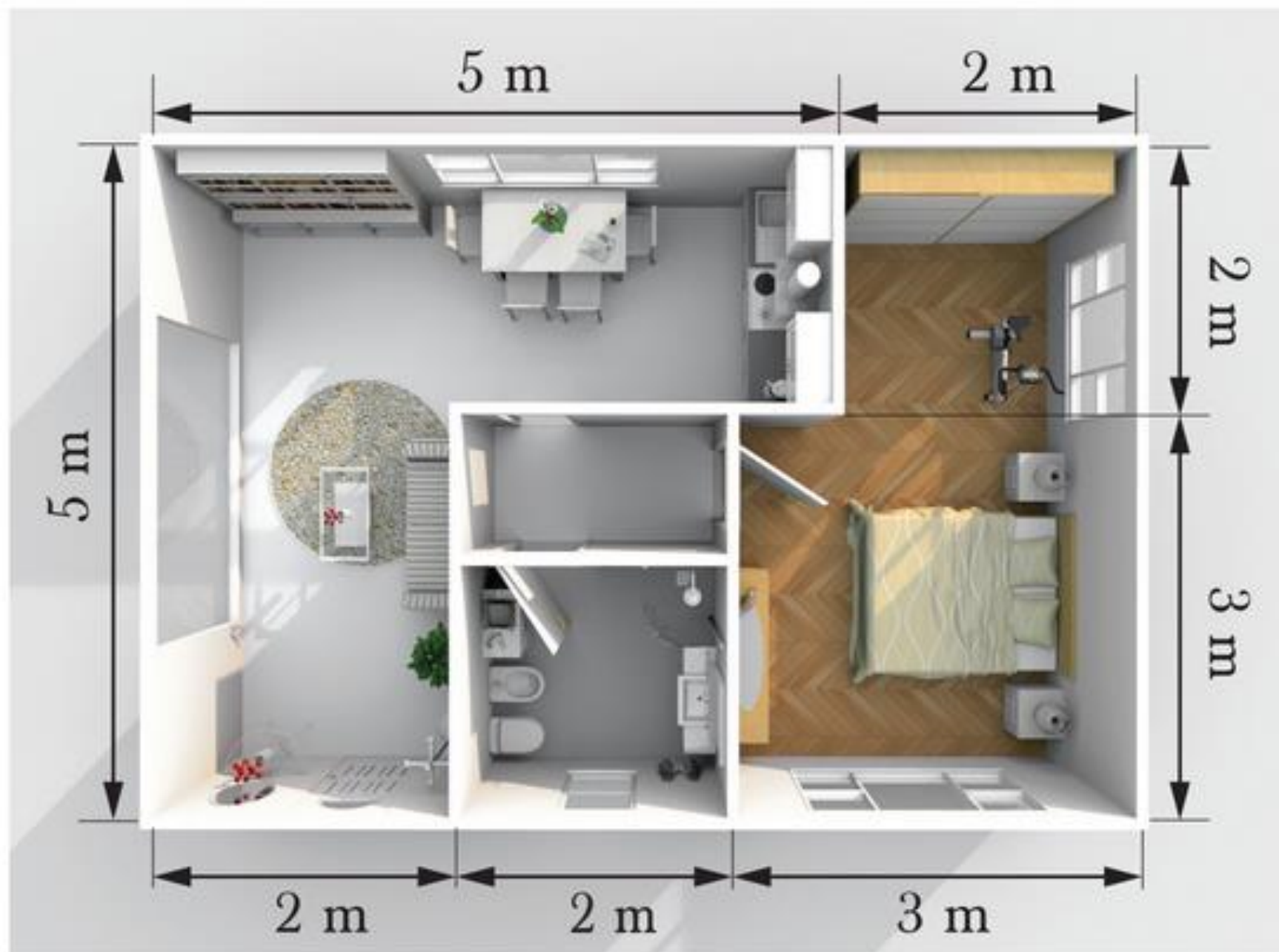
Učenje i poučavanje predmeta Matematika potiče kreativnost, preciznost, sustavnost, apstraktno mišljenje i kritičko promišljanje koje pomaže pri uočavanju i rješavanju problema iz svakodnevice i društvenoga okružja.

Opseg i površina

Citat

„Nemoj učenicima pružati samo informaciju, pomози im razviti sposobnost korištenja prikupljenih znanja i naviku sustavnog rada.“

George Polya



3. razred

MAT OŠ D.3.3. Određuje opseg likova.	Opisuje opseg kao duljinu ruba bilo kojega geometrijskog lika. Mjeri duljinu dužine. Mjeri opseg neformalnim i formalnim načinima. Određuje opseg trokuta, pravokutnika i kvadrata kao zbroj duljina njihovih stranica. Procjenjuje i mjeri opseg lika objašnjavajući postupak. Korelacija s Hrvatskim jezikom i Tjelesnom i zdravstvenom kulturom.	Mjeri opseg likova neformalnim načinima i povezuje opseg s duljinama pojedinih stranica.
Sadržaj: Opseg trokuta, pravokutnika i kvadrata kao zbroj duljina stranica.		
Preporuka za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda: U početku poučavanja učenici će mjeriti opseg neformalnim načinom: koristeći se koncem, vunom, papirnatim vrpčama... Učenike se navodi na zaključak da je opseg zbroj duljina svih stranica mnogokuta. Učenici mogu odrediti i opseg lika sastavljenoga od dvaju ili više likova poznatih učeniku, zaključivati o svojstvima dvaju ili više likova i sl. Duljina stranica zadanoga lika kojemu se mjeri opseg može se prenositi i šestarom na crtu. <u>Učenike je potrebno poticati na procjenjivanje rezultata na svim razinama, a razumna su očekivanja na najvišoj razini. Pri određivanju opsega trokuta, pravokutnika i kvadrata kao zbroja duljina stranica ne rabi se formula za izračunavanje, a opseg se zapisuje malim slovom o (npr. o = 12 cm).</u>		

4. razred

KURIKULUM ZA NASTAVNI PREDMET MATEMATIKE

MAT OŠ D.4.2.

Uspoređuje površine likova te ih mjeri jediničnim kvadratima.

U ravnini uspoređuje likove različitih površina prema veličini dijela ravnine koju zauzimaju te tako upoznaje pojam površine.

Mjeri površinu likova ucrtanih u kvadratnoj mreži prebrojavanjem kvadrata.

Ucrtava u kvadratnu mrežu likove zadane površine.

Mjeri površine pravokutnih likova prekrivanjem površine jediničnim kvadratom.

Poznaje standardne mjere za površinu (centimetar kvadratni, decimetar kvadratni, metar kvadratni).

Mjeri pravokutne površine u neposrednoj okolini.

Prošireni sadržaji:

Preračunava mjerne jedinice.

Korelacija s Hrvatskim jezikom.

Uspoređuje i mjeri površine likova ucrtanih u kvadratnoj mreži.

Sadržaj: Mjerenje površine. Kvadratna mreža. Mjerne jedinice za površinu.

Prošireni sadržaj: Preračunavanje mjernih jedinica.

Preporuka za ostvarivanje odgojno-obrazovnog ishoda:

Težište je ishoda na pojmu površine kao veličine dijela ravne plohe koji je lik zauzeo. U kvadratnoj mreži mogu se ucrtavati različiti likovi sastavljeni od jediničnih kvadrata i uspoređivati njihove površine. S učenicima se može izrezati više jediničnih kvadrata (nije nužno da im je stranica duga 1 cm ili 1 dm – važno je da za nas predstavljaju jedinični kvadrat) kojima se tada služimo u modeliranju i mjerenju. Modeliramo tako da učenicima damo problemski zadatak, na primjer da izrade lik površine 8 jediničnih kvadrata, što je, naravno, moguće napraviti na mnogo načina. Također mogu mjeriti površinu prekrivanjem lika jediničnim kvadratima. Na jednak način mogu mjeriti površine iz svoje neposredne okoline, na primjer površinu klupe ili knjige. Bilo bi dobro pokazati da dva lika iste površine mogu imati različite opsege, a to se može napraviti dobrim odabirom zadatka.

Primjer problemskoga zadatka: Uzmite 12 jediničnih kvadrata. Slažite od njih različite pravokutnike i bilježite im površinu i opseg. Što primjećujete? Pri određivanju površine nikako se ne koristite formulom za izračunavanje, a površinu valja zapisati velikim slovom P (npr. $P = 8$ centimetara kvadratnih).

TEORIJA



PRAKSA



$$o = 4a$$

$$o = a + b + c \quad P = \frac{av_a}{2}$$

$$P = a \cdot b$$

$$o = 2a + 2b$$

$$o = a + 2b$$

$$o = 3a$$

$$P = a \cdot a$$

$$P = \frac{ab}{2}$$

Primjer 1.

87.

4. razred OŠ

Ljetno kolo 2017./2018.

10 bodova

Jednakokrtačan trokut čije su duljine stranica 13 cm, 13 cm i 16 cm ima isti opseg kao jednakostraničan trokut. Koliko je duga stranica jednakostraničnog trokuta?

A 13 cm

B 16 cm

C 14 cm

D 15 cm

$$a = 16 \text{ cm}$$

$$b = 13 \text{ cm}$$

$$o = a + 2b$$

$$o = 16 + 26$$

$$o = 42 \text{ cm}$$

$$o = 3a$$

$$42 = 3a$$

$$a = 42 : 3$$

$$a = 14 \text{ cm}$$

90.

4. razred OŠ

Jesensko kolo 2020./2021.

30 bodova

Od zlatne niti duljine 64 cm baka je oblikovala kvadrat. Kolika bi joj duljina niti trebala želi li oblikovati pravokutnik kojem je jedna stranica dva puta dulja, a druga stranica dva puta kraća od stranice kvadrata?

A 128 cm

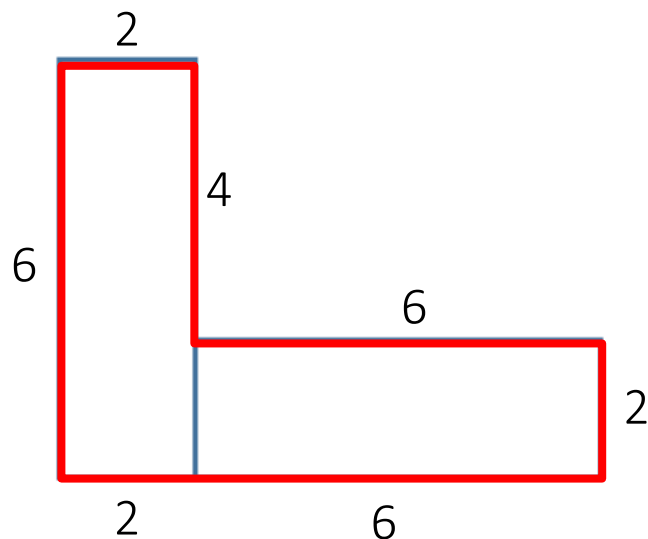
B 40 cm

C 64 cm

D 80 cm

Zadatak 1.

Od dva sukladna pravokutnika kojima su duljine stranica 2 cm i 6 cm, napravljen je lik kao na slici. Koliki je opseg dobivenog lika?



Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb
opća gimnazija – 96 učenika
upisani sa **76.15** bodova i više

$$o = 6 + 8 + 2 + 6 + 4 + 2$$
$$o = 28$$

44 %

$$o_1 = 2a + 2b = 4 + 12 = 16$$
$$o_2 = 2 \cdot o_1 = 32$$

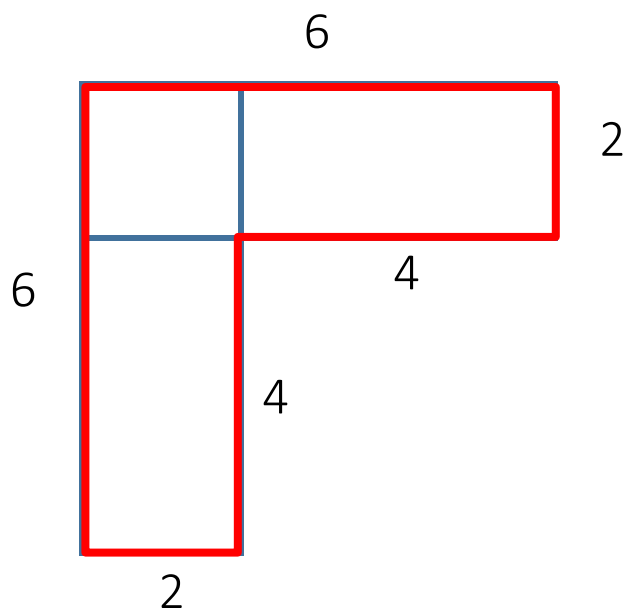
31 %

8, 16, 24, 26, 30, 32, 36, 40, 64

25 %

Zadatak 2.

Od dva sukladna pravokutnika kojima su duljine stranica 2 cm i 6 cm, napravljen je lik kao na slici. Koliki je opseg dobivenog lika?



Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb
opća gimnazija – 96 učenika
upisani sa **76.15** bodova i više

$$o = 6 + 6 + 2 + 4 + 4 + 2$$

$$o = 24$$

52 %

$$o_1 = 2a + 2b = 4 + 12 = 16$$

$$o_2 = 2 \cdot o_1 = 32$$

16 %

10, 14, 20, 22, 28, 32, 36, 40

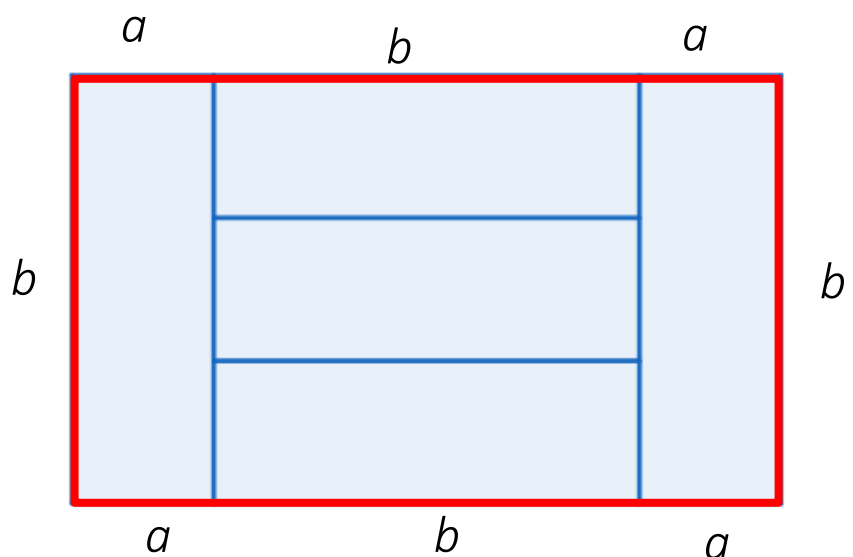
27 %

nisu odgovorili na pitanje

5 %

Zadatak 3.

Ako je opseg danog lika sastavljenog od 5 sukladnih pravokutnika jednak 30 cm, koliki je opseg jednog od tih pet pravokutnika?



$$o_1 = 30$$
$$4a + 4b = 30$$

$$o = 2a + 2b$$
$$= 30 : 2$$
$$= 15$$

Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb
opća gimnazija – 96 učenika
upisani sa 76.15 bodova i više

$$o = 15$$

15 %

$$o = o_1 : 5 = 30 : 5 = 6$$

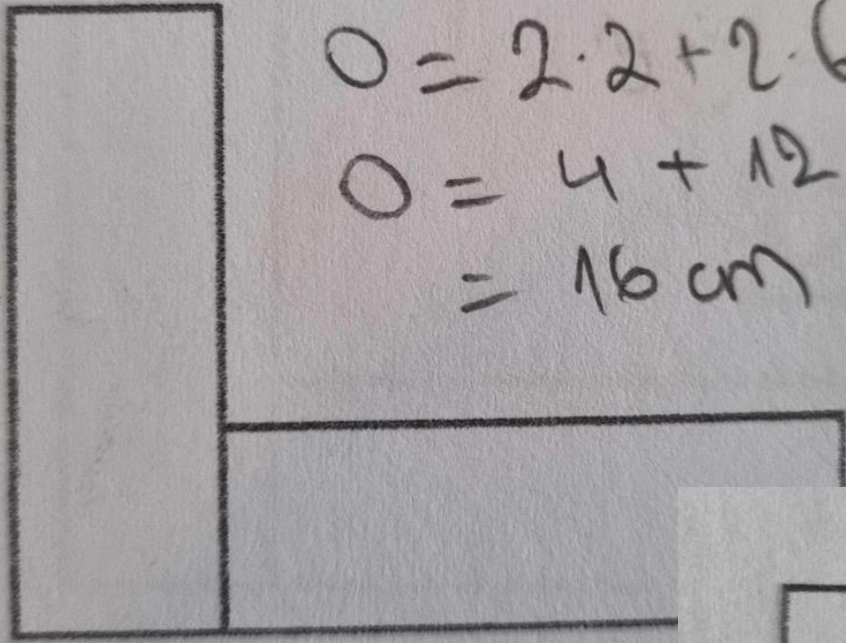
43 %

3, 5, 5.32, 6, 7.5, 10, 11, 14,
16, 16.66667, 18.75, 20

23 %

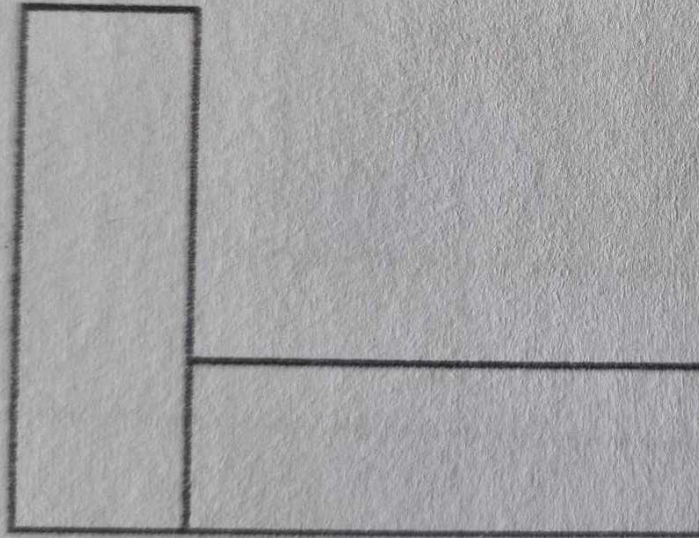
nisu odgovorili na pitanje

19 %



$$O = 2a + 2b$$
$$O = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6$$
$$O = 4 + 12$$
$$= 16 \text{ cm}$$

$$O = 32 \text{ cm}$$



$$a = 24 \text{ cm}$$
$$b = 8 \text{ cm}$$

$$O, P = ?$$

$$O = 2a + 2b$$

$$O = 48 + 16$$

$$O = 64 \text{ cm}$$

$$o = 4a$$

$$o = a + b + c$$

OPSEG JE DULJINA RUBA!

$$o = 2a \times$$

$$o = a + 2b$$

$$o = 3a$$

1. Što je opseg?

Opseg je zbroj svih stranica
geometrijskog lika

2. Što je površina?

Površina je

1. Što je opseg?

Opseg je zbroj svih stranica

2. Što je površina?

Površina je ukupni umnožak stranica

1. Što je opseg?

Opseg je zbroj duljina svih stranica
nekog tijela.

2. Što je površina?

Površina je umnožak stranica nekog
tijela.

2. Što je površina?



osjereni dio je površina.

2. Što je površina?

Nešto unutar svih stranica.

2. Što je površina? Umnožak svake stranice (bez pomnoženja stranica istih iznosa) neke geometrijskog tijela.

2. Što je površina?

Površina je kvadrat neke stranice.

1. Što je opseg?

Opseg je zbiraj svih stranica nekog oblika.

2. Što je površina?

Površina je povr. veličina plohe nekog tijela.

1. Što je opseg?

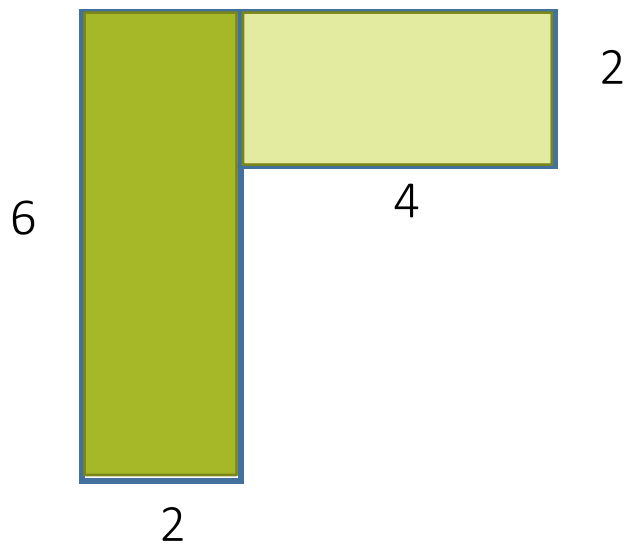
duljina ruba

2. Što je površina?

veličina plohe

Zadatak 2.

Od dva sukladna pravokutnika kojima su duljine stranica 2 cm i 6 cm, napravljen je lik kao na slici. Kolika je površina dobivenog lika?



Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb
opća gimnazija – 96 učenika
upisani sa 76.15 bodova i više

$$P = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2$$

$$P = 20$$

68 %

$$P_1 = a \cdot b = 2 \cdot 6 = 12$$

$$P = 2 \cdot P_1 = 24$$

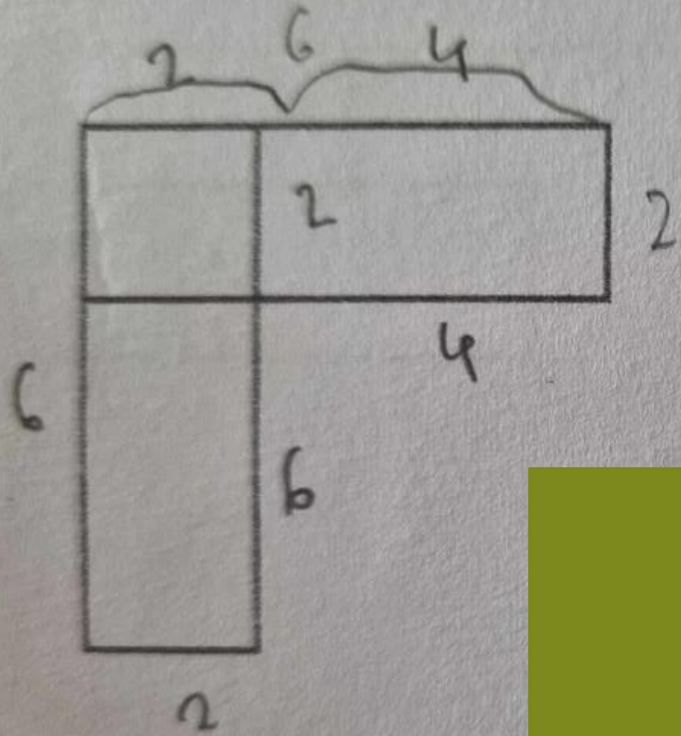
10 %

5, 8, 10, 12, 16, 24, 28, 52,
96, 288, 3456

18 %

nisu odgovorili na pitanje

4 %



$$P = 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4$$

$$P = 96 \text{ cm}^2$$

$$\frac{12 \cdot 8}{96}$$

$$P_1 = 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6$$

$$P_1 = 144$$

$$P_2 = 144$$

$$P = 288 \text{ cm}^2$$

$$\begin{array}{r} 38416 \\ 204 \\ \hline 230416 \\ 9216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16.36 \\ 48 \\ \hline 5.76 \\ 2.6 \cdot 2.6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2.6 \cdot 2.6 \end{array}$$

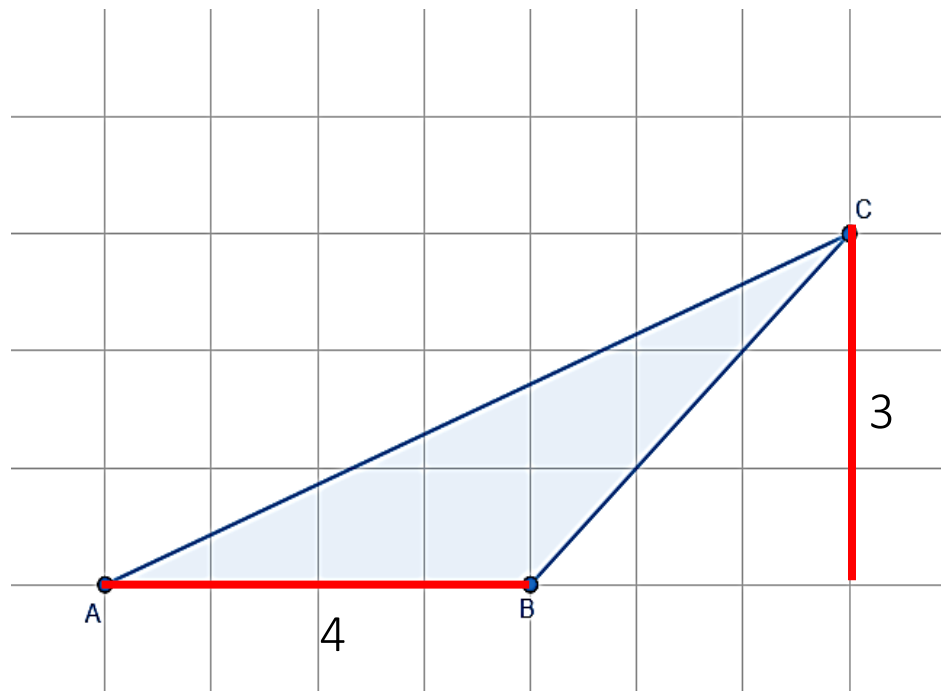
$$P = 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6$$

$$P = 3456 \text{ cm}^2$$

$$\frac{37616}{2556}$$

Zadatak 4.

Kolika je površina lika u kvadratnoj mreži?



$$P = \frac{7 \cdot 3}{2} - \frac{3 \cdot 3}{2} = 6$$

$$P = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb
opća gimnazija – 96 učenika
upisani sa 76.15 bodova i više

$P = 6$

42 %

1.75, 3, 3.375, 3.464102, 3.5, 4,
5, 5.6, 6.244998, 7, 8, 9,
9.16515, 10.5, 12, 13, 16, 28, 42,
45, 56, 60, 84, 98.59006

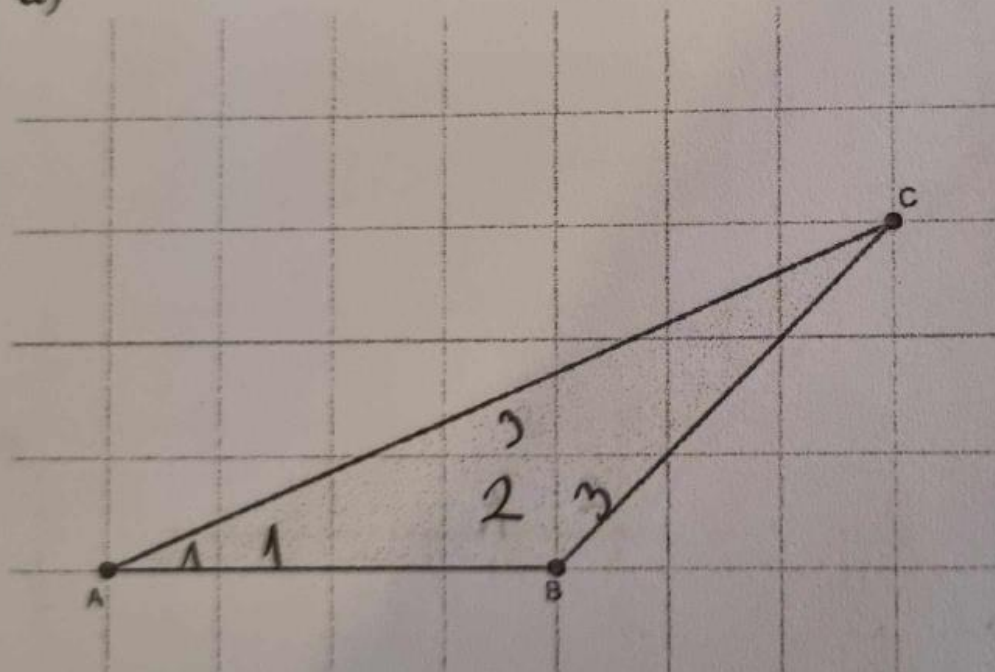
37 %

nisu odgovorili na pitanje

21 %

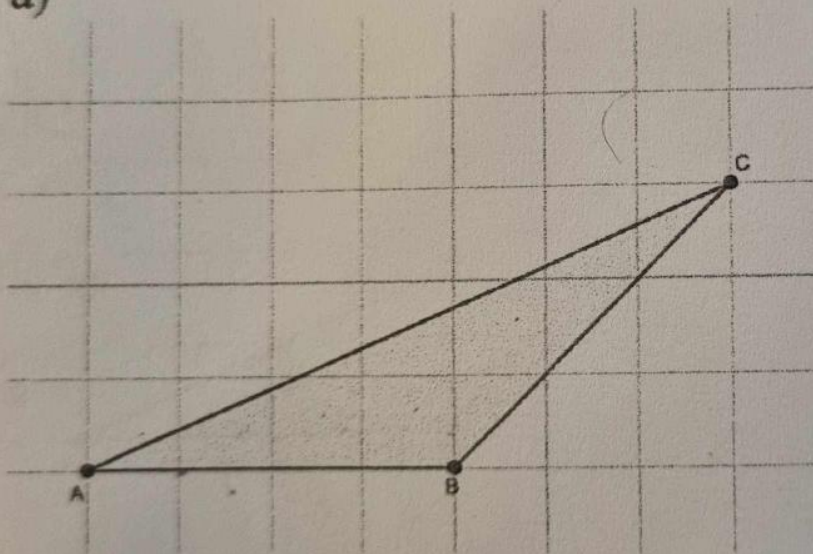
5. Kolika je površina lika na slici? Teško je odrediti.

a)



5. Kolika je površina

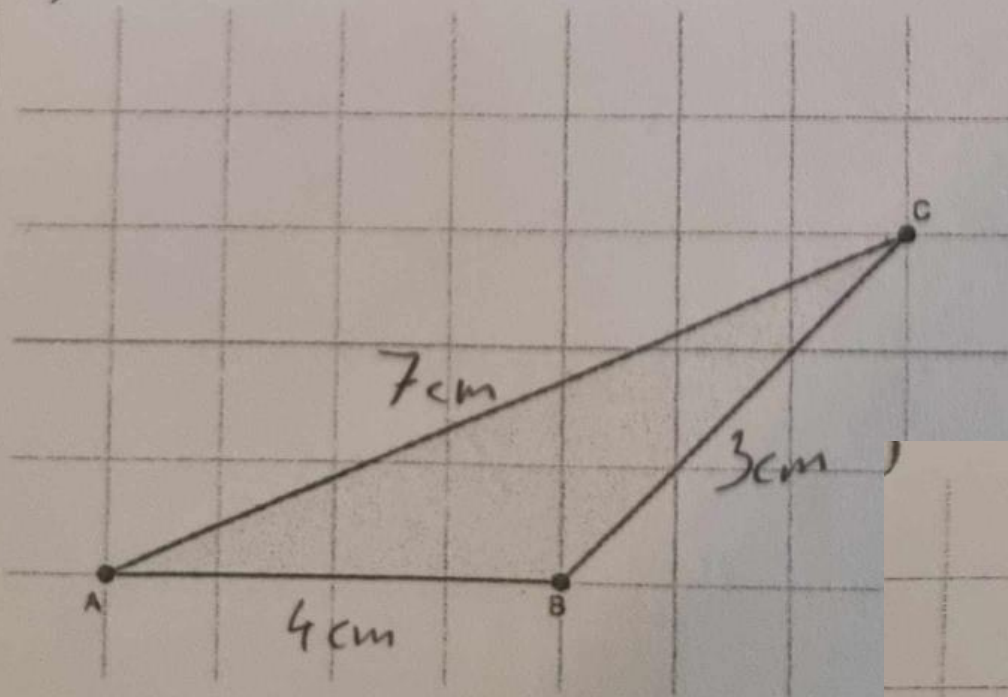
a)



1 cm²

Gledaju se svi kvadrati koji ulaze u trokut više od pola.

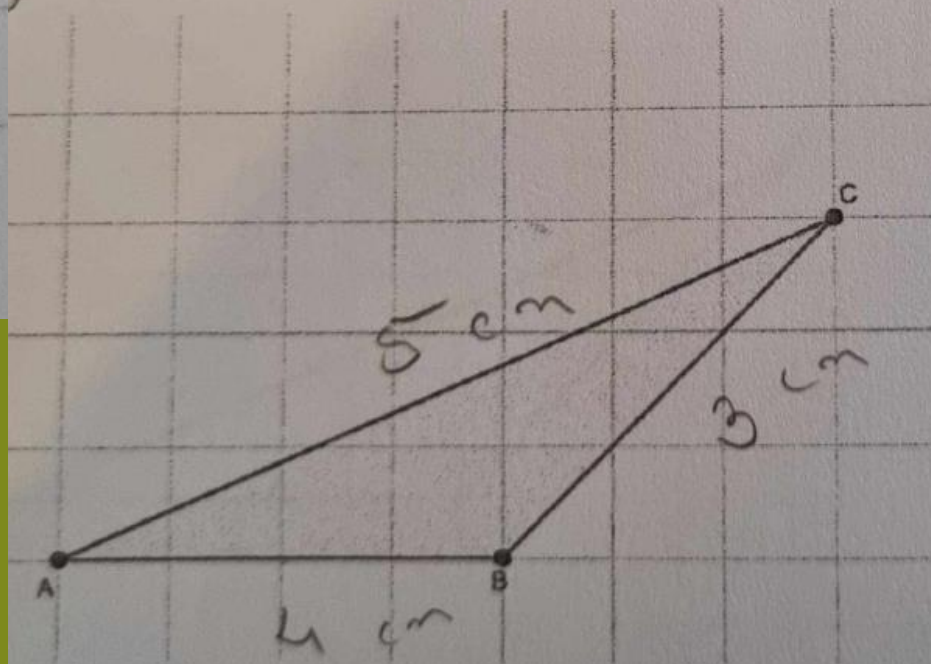
a)



$$p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$p = \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$P = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 4^2 + 3^2$$

$$c^2 = 16 + 9$$

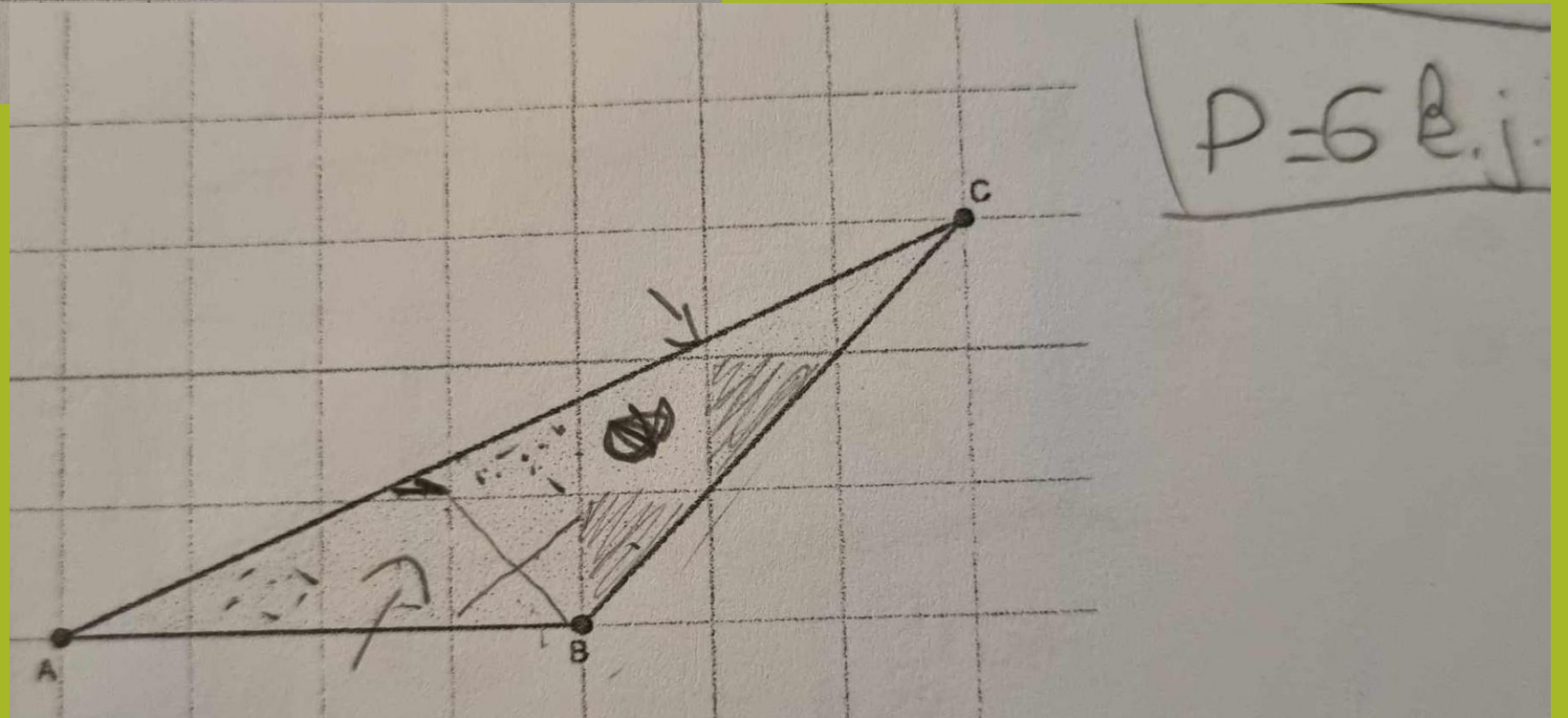
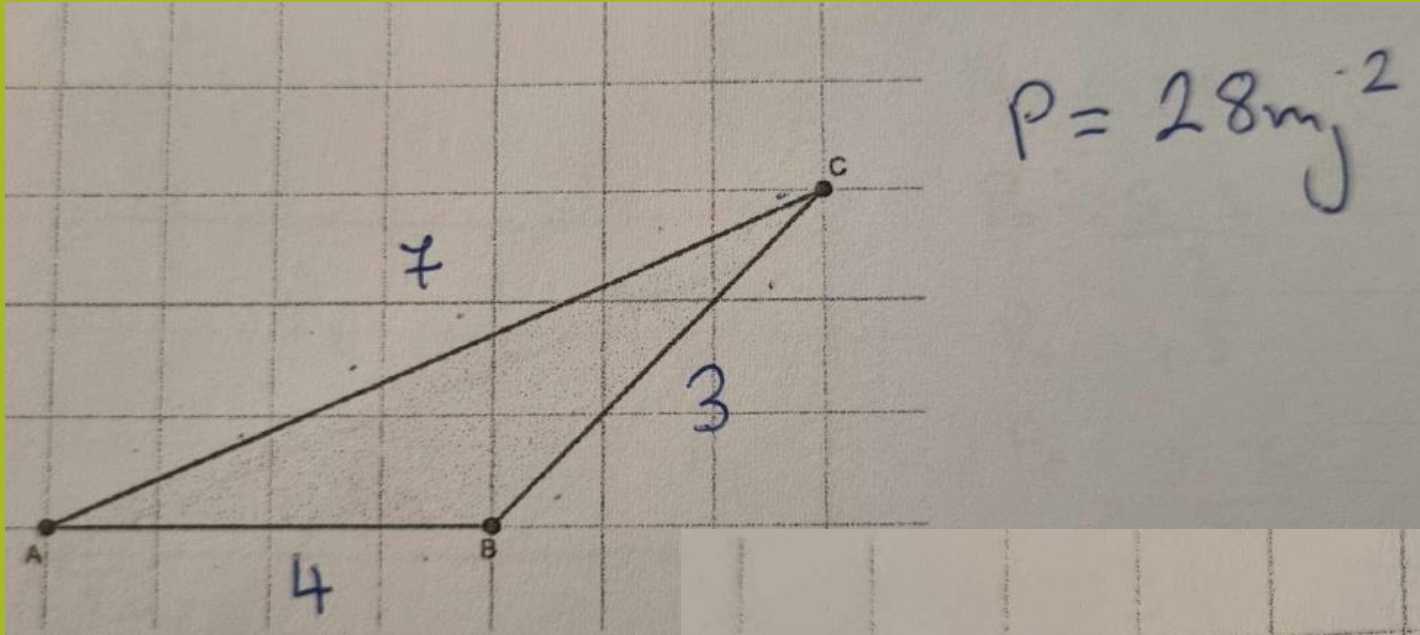
$$c^2 = 25 \sqrt{\quad}$$

$$c = 5 \text{ cm}$$

$$P = 5 \cdot 3 \cdot 4$$

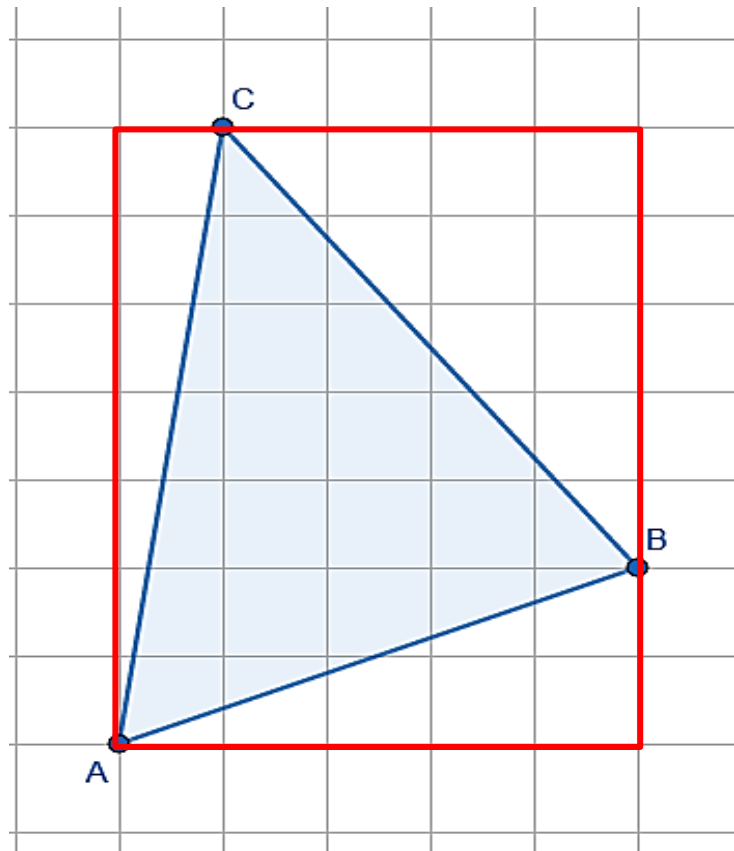
$$P = 60 \text{ cm}^2$$

$$\frac{15 \cdot 4}{60}$$



Zadatak 4.

Kolika je površina lika u kvadratnoj mreži?



$$P = 5 \cdot 5 - \frac{5 \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot 5}{2} - \frac{7 \cdot 1}{2} = 16.5$$

Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb
opća gimnazija – 96 učenika
upisani sa **76.15** bodova i više

$P = 16.5$

11 %

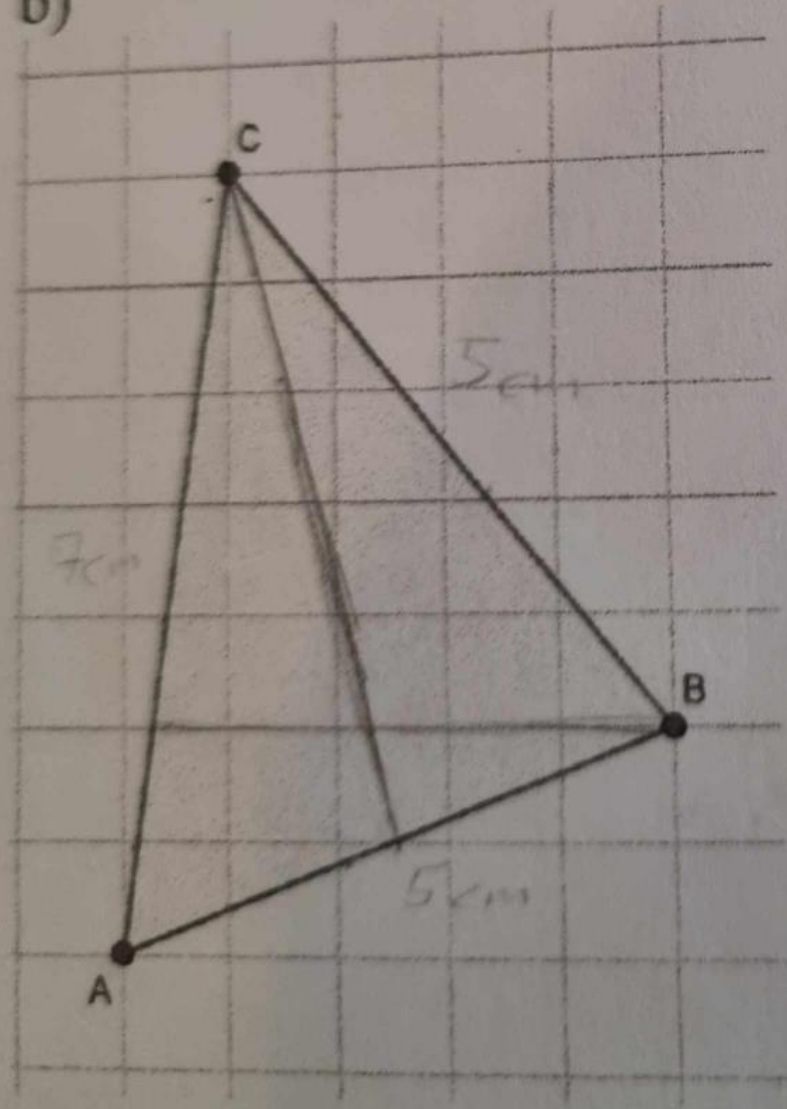
5, 6, 10, 12, 12.5, 13, 14, 15,
15.5, 16, 16.25, 17, 17.05, 17.2,
17.5, 18, 20, 23.5, 25.11474,
26.5, 40, 62.5, 150, 157.5, 210,
336

54 %

nisu odgovorili na pitanje

35 %

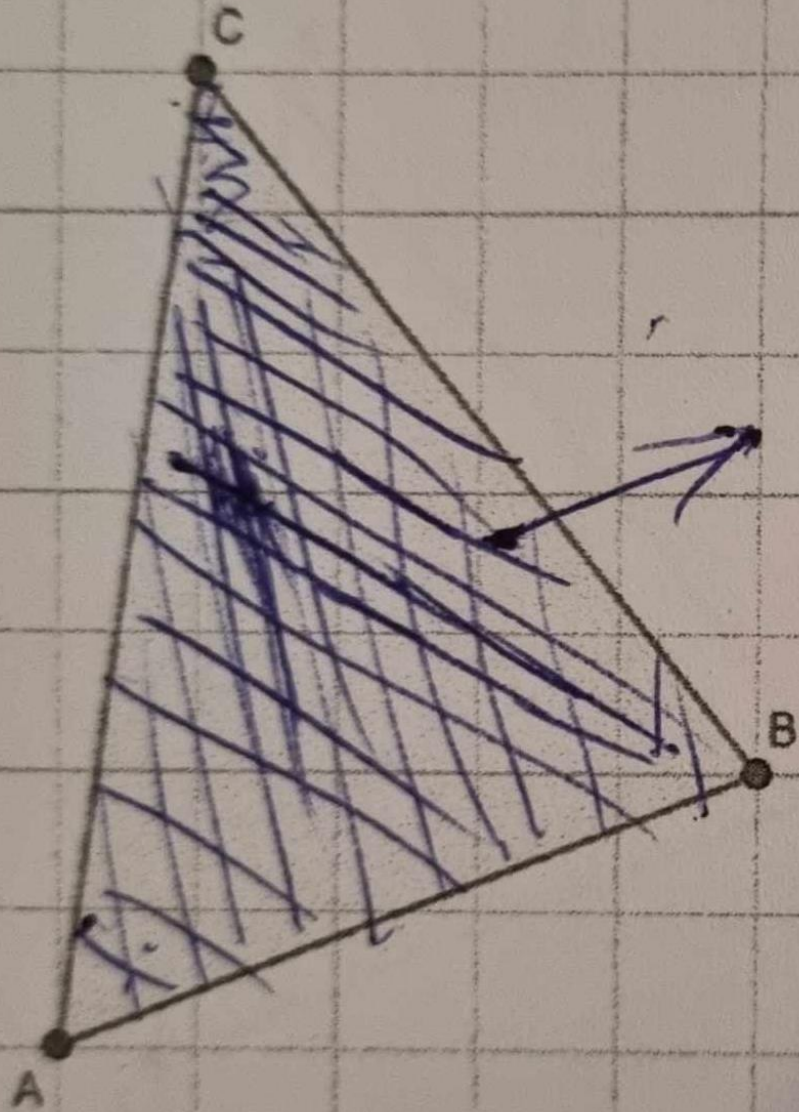
b)



$$P = \frac{a \cdot V_a}{2}$$

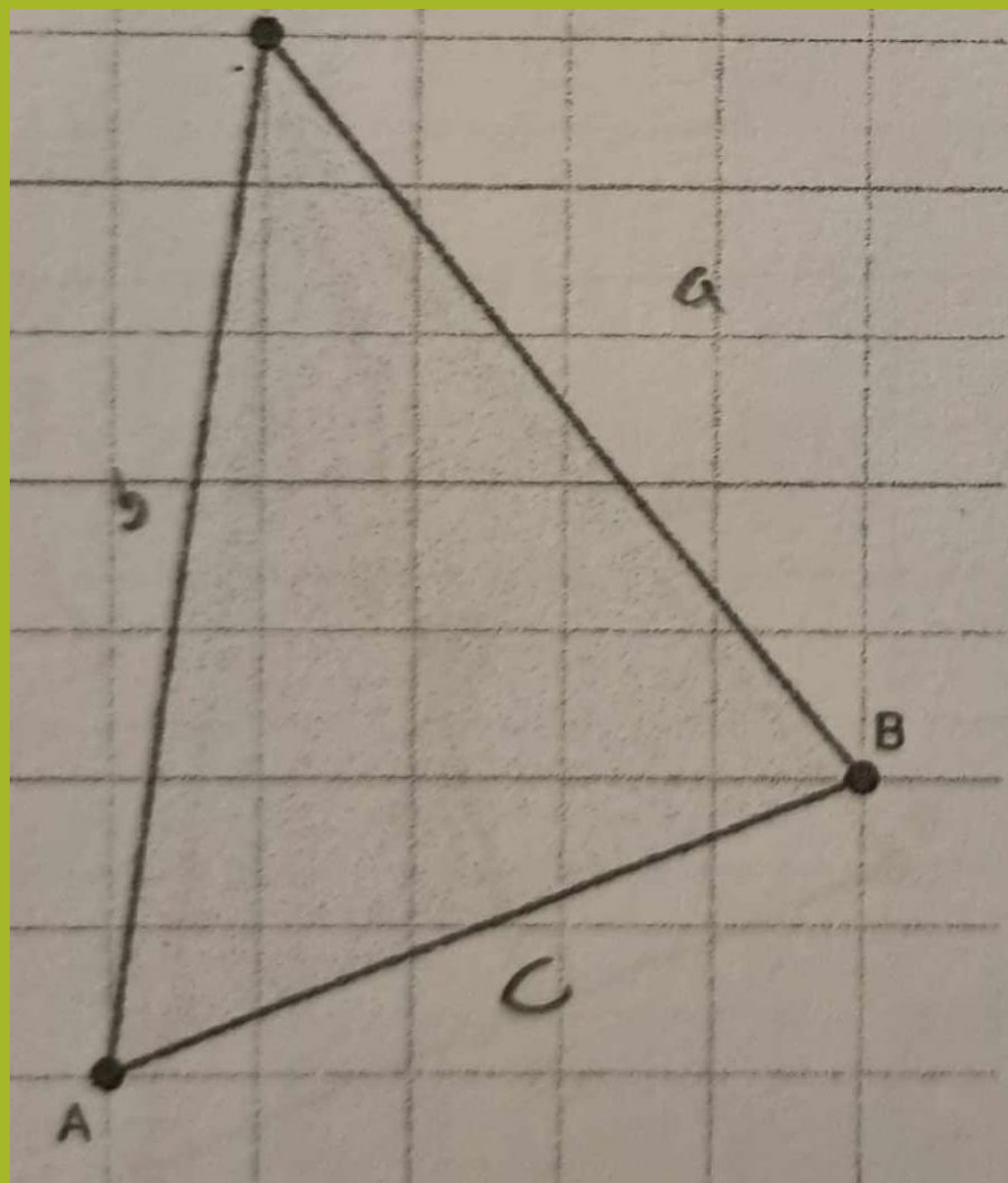
$$P = \frac{5 \cdot 6}{2}$$

$$P = 15 \text{ cm}^2$$

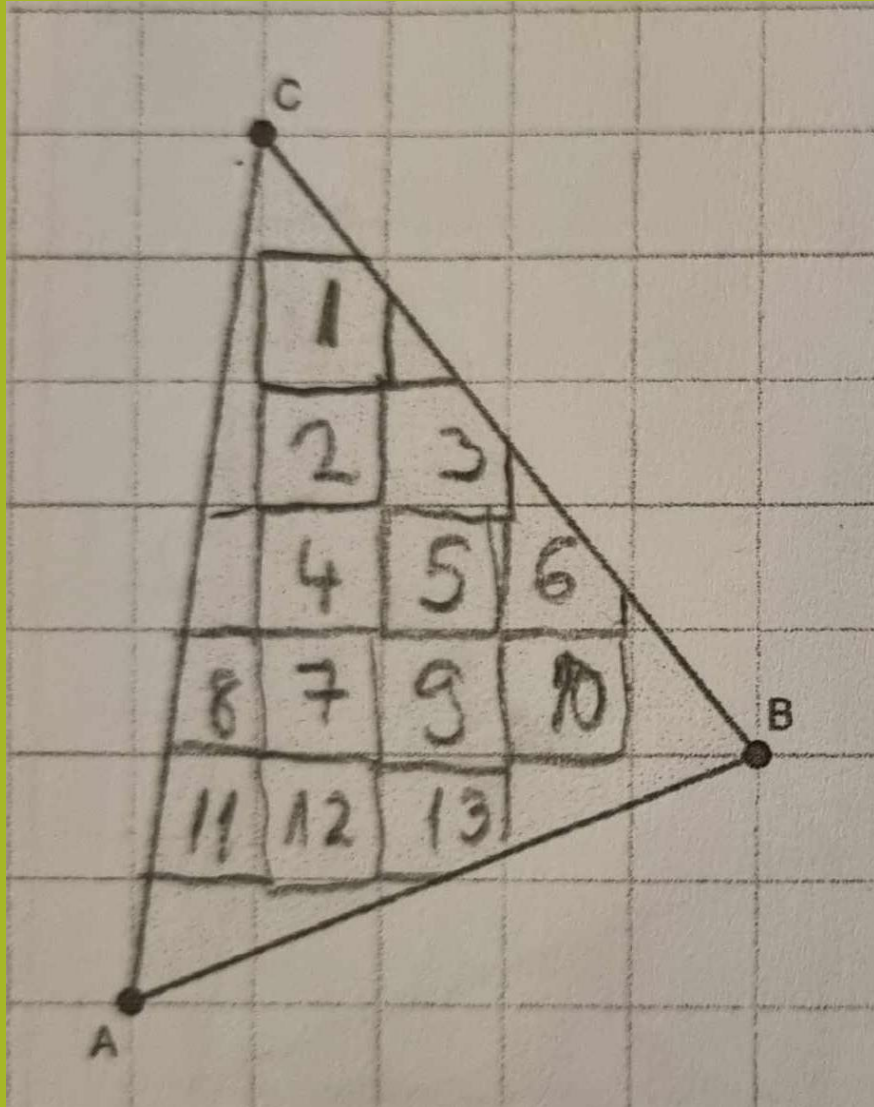


$$P = \frac{N d^2}{2}$$

POVRŠINA



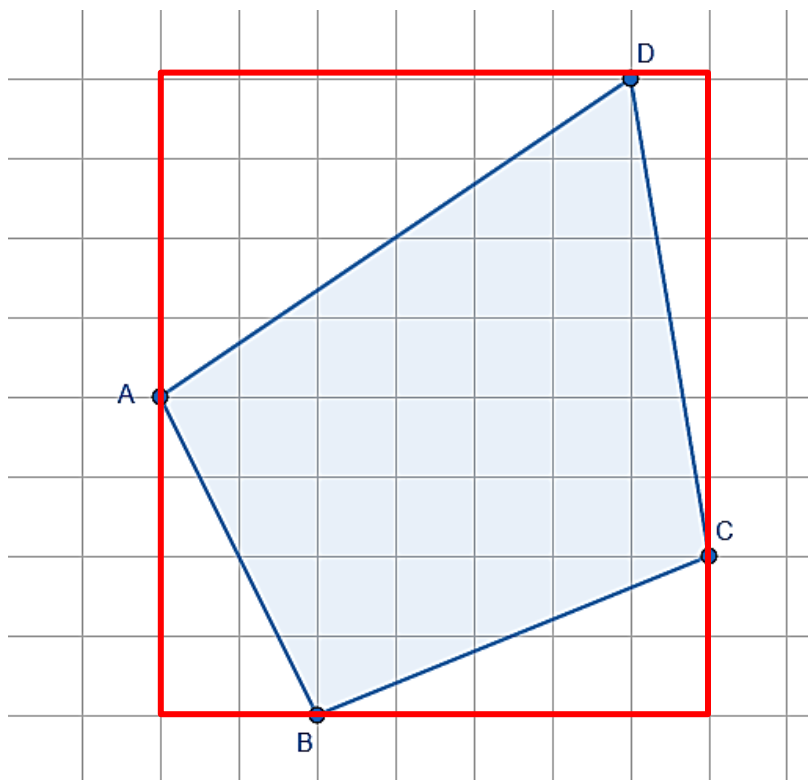
$$\begin{aligned} P &= a \cdot b \cdot c \\ &= 6 \cdot 7 \cdot 5 \\ &= 210 \text{ kvadratnih} \\ &\quad \text{jedinica} \end{aligned}$$



13 kwadratnik
jednica

Zadatak 5.

Kolika je površina lika u kvadratnoj mreži?



$$P = 8 \cdot 7 - \frac{5 \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot 5}{2} - \frac{6 \cdot 1}{2} - \frac{6 \cdot 4}{2} = 32$$

Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb
opća gimnazija – 96 učenika
upisani sa 76.15 bodova i više

$P = 32$

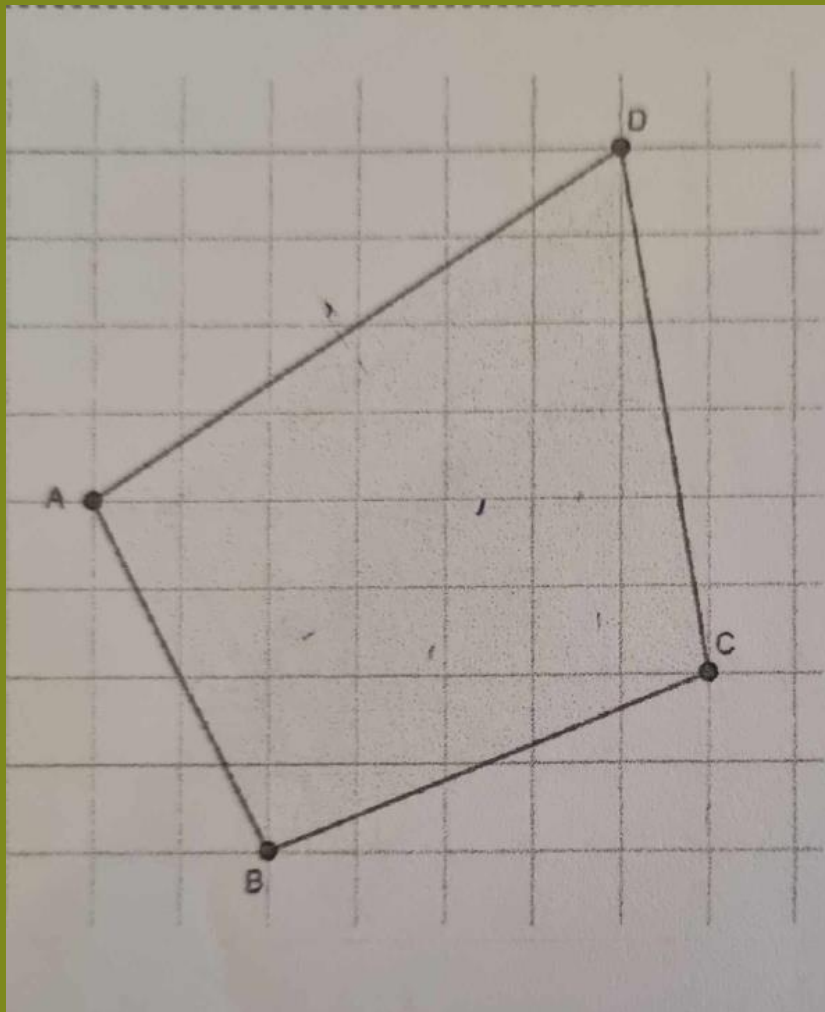
26 %

13, 15, 23, 23.4, 24, 24.74874,
28, 29.5, 30, 31, 39, 40, 92, 720

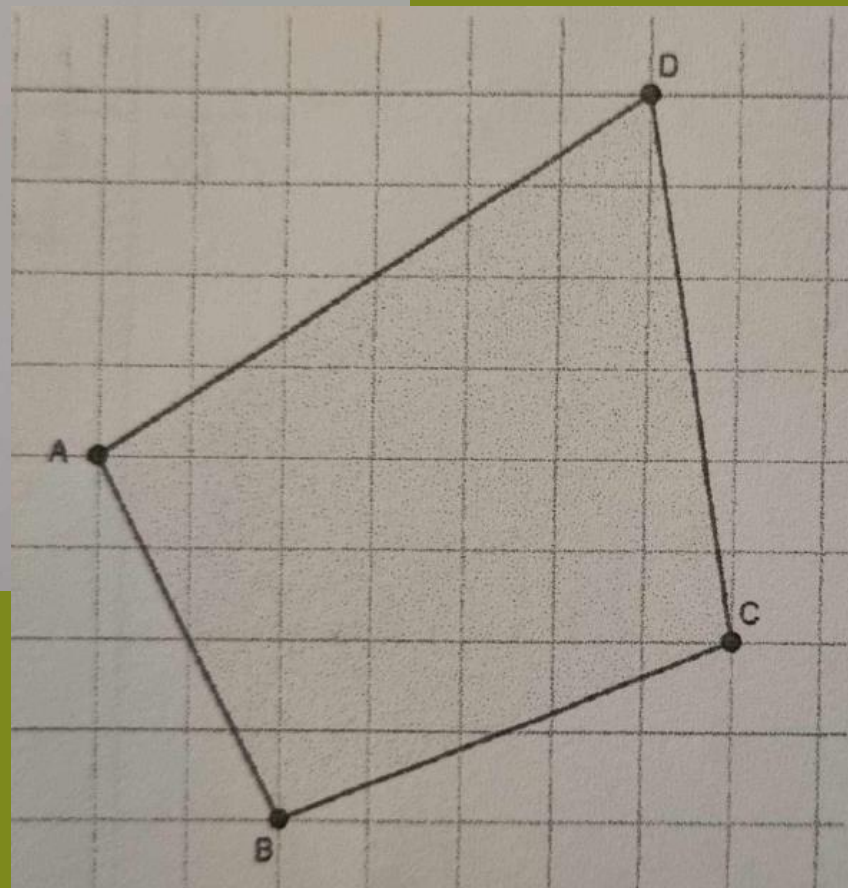
51%

nisu odgovorili na pitanje

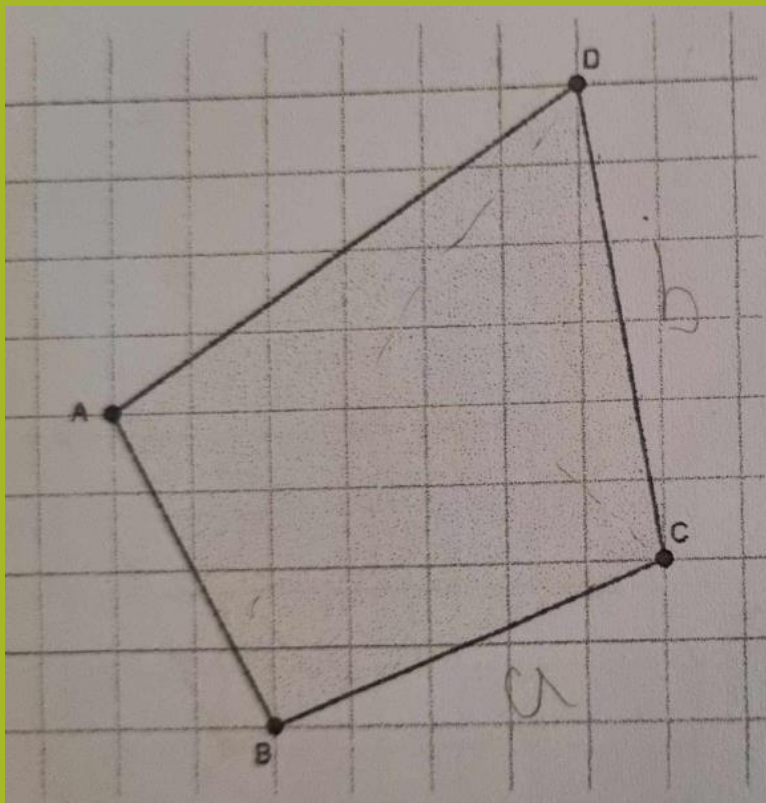
23 %



$$P = a \cdot b \cdot c \cdot d$$



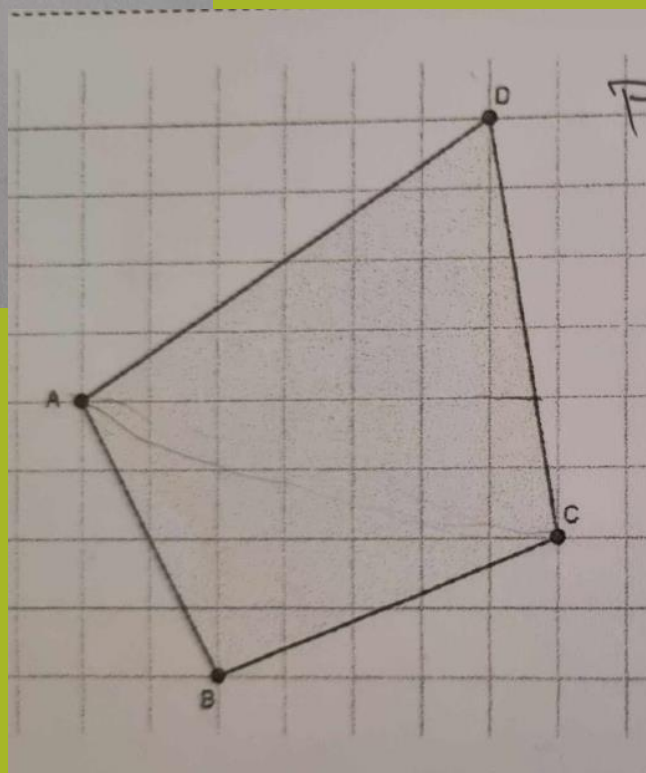
$$P = a \cdot b \cdot c \cdot d$$



$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$P = \frac{5 \cdot 6}{2}$$

$$P \approx 15 \text{ cm}^2$$

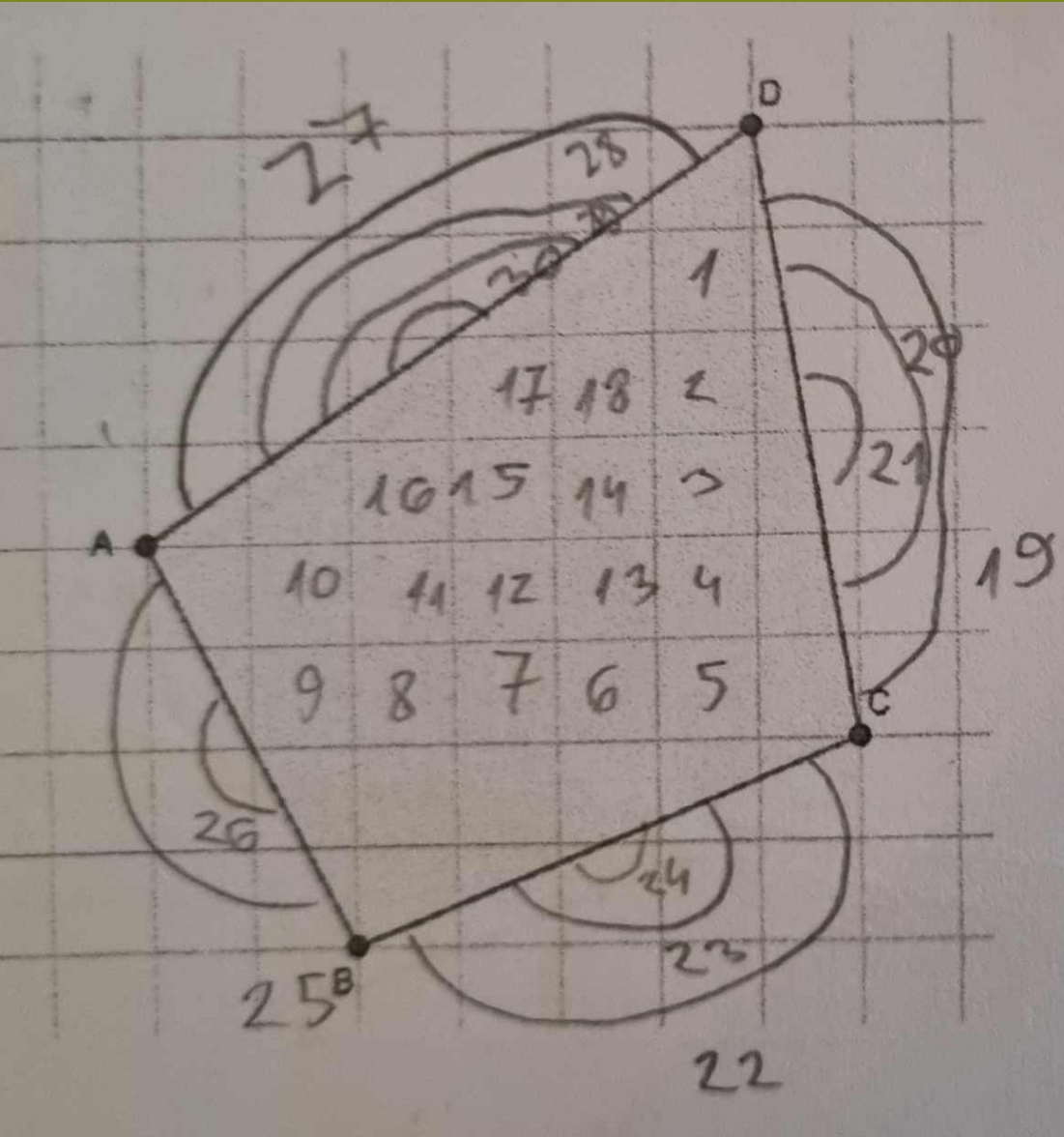


$$P = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$$

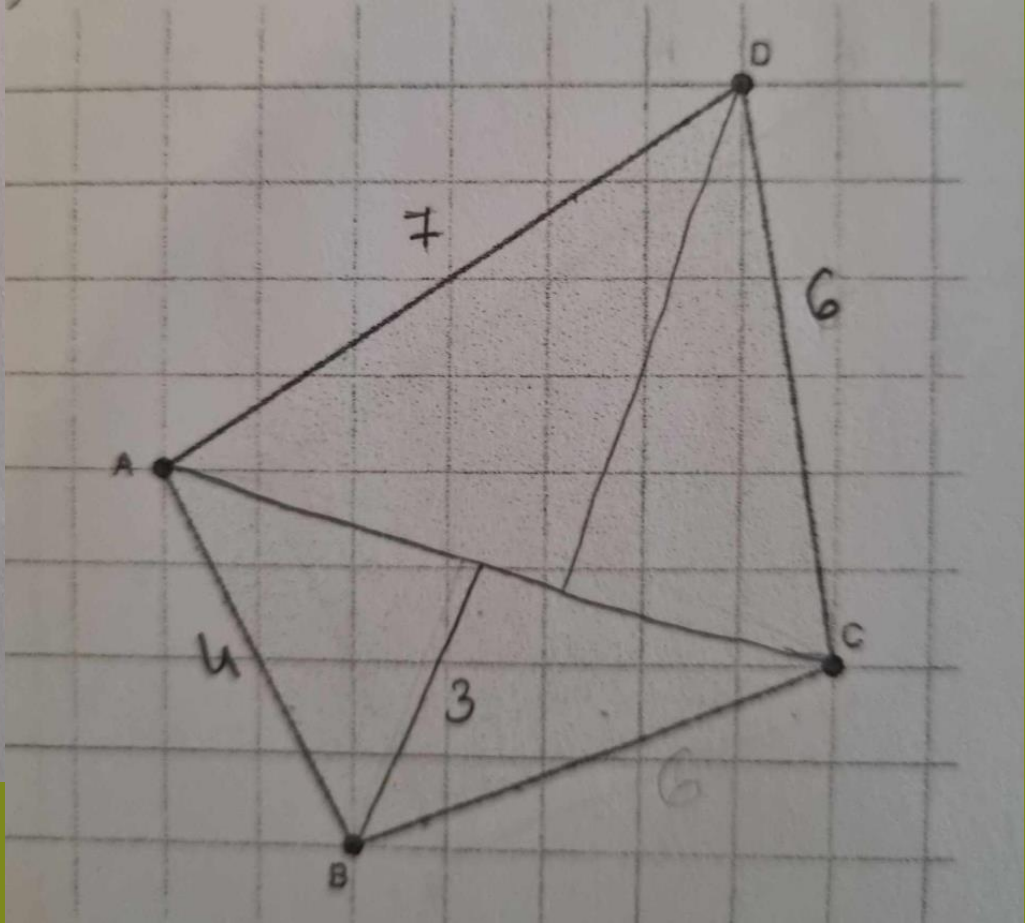
$$P = \frac{(5+7) \cdot 5}{2}$$

$$P = \frac{12 \cdot 5}{2}$$

$$P = 30 \text{ kvadratičnih jedinica}$$



$\Phi = 30$ levochrota.



$$o = 4a$$

$$P = av_a$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$o = a + b + c$$

$$P = \frac{av_a}{2}$$

$$P = a \cdot b$$

$$o = 2a + 2b$$

$$o = 3a$$

$$o = a + 2b$$

$$P = a \cdot a$$

$$P = \frac{(a+c)v}{2}$$

$$P = \frac{ab}{2}$$

Neznam formule"

Dijagnoza

duljina

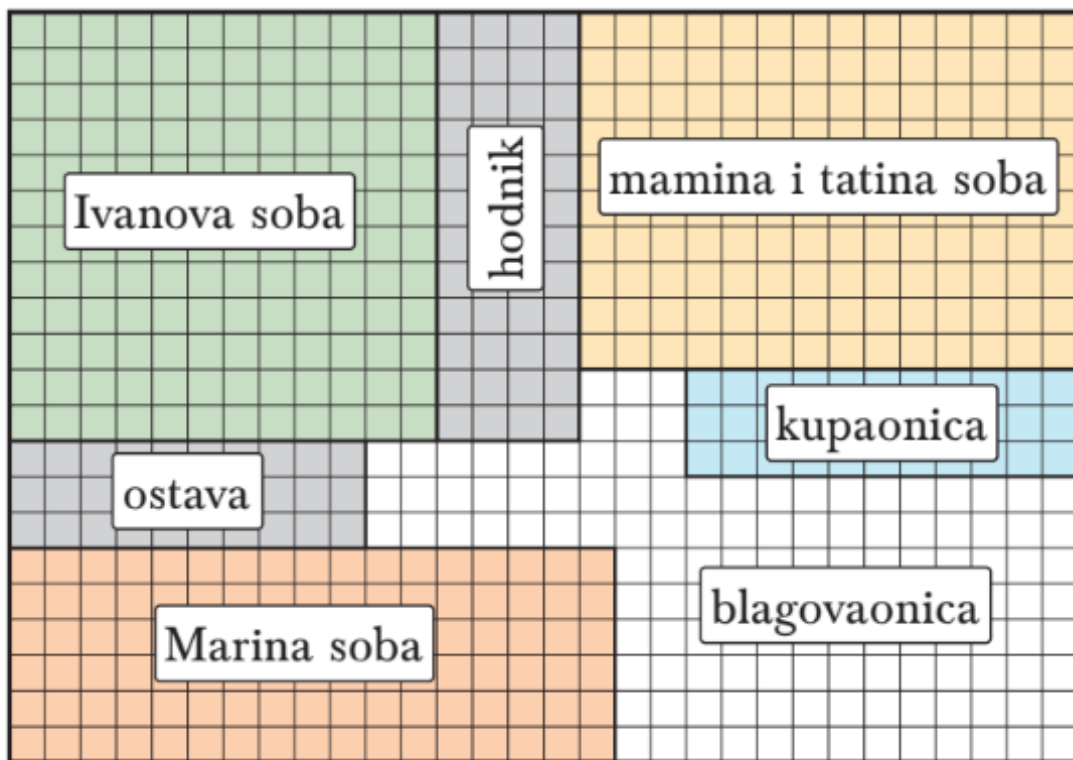
opseg

površina

pojmovi

procjena

nerazumijevanje
formula

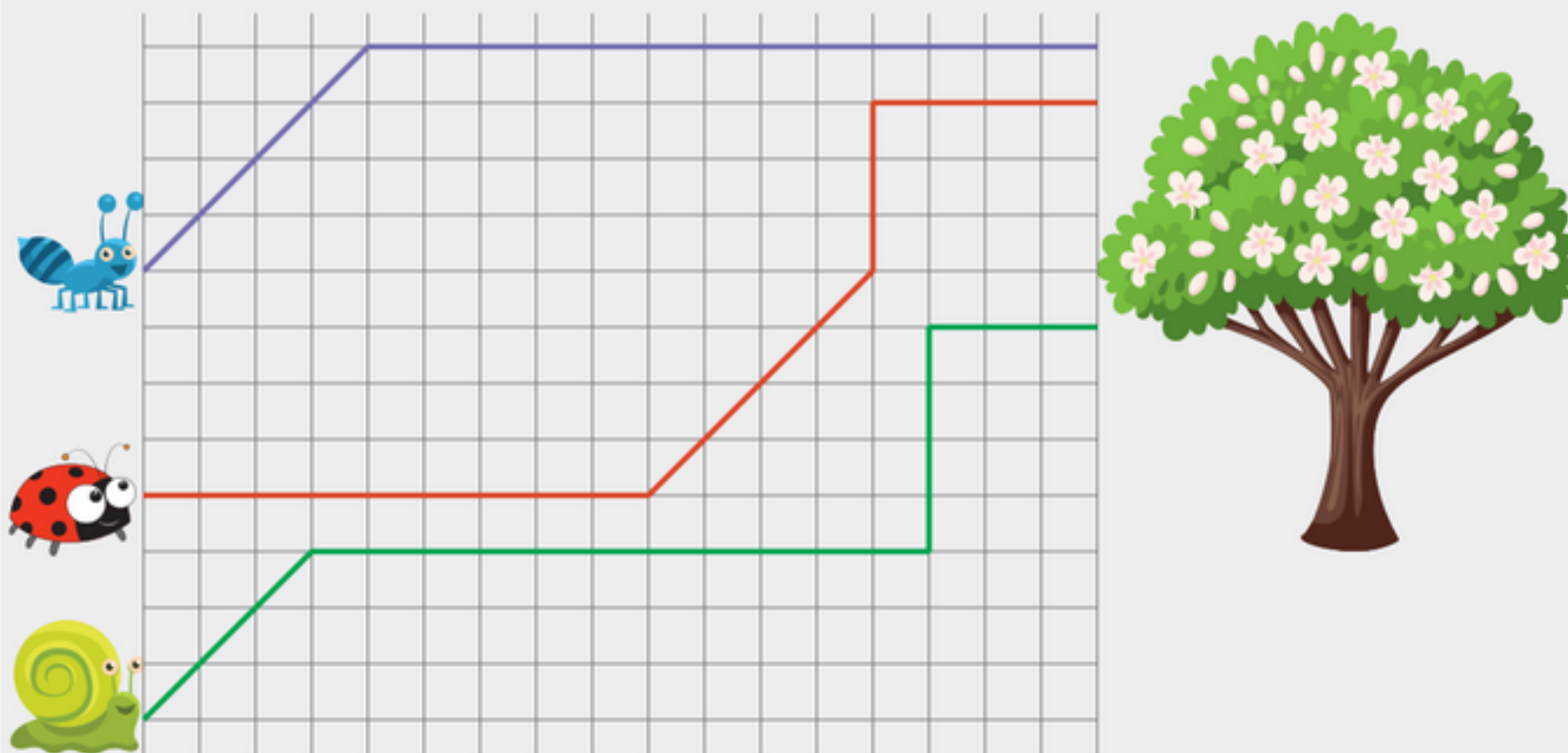


Ima li lijeka?

odvojite nekoliko sati,
dobitak je ogroman!

KORISTITE KVADRATNU
MREŽU

DA BI DOŠLI DO STABLA PREPUNOG CVJETOVA, MRAV, BUBAMARA I PUŽ HODALI SU PO MREŽI PUTEVIMA KAO NA SLICI. TKO JE PREŠAO NAJDULJI PUT?

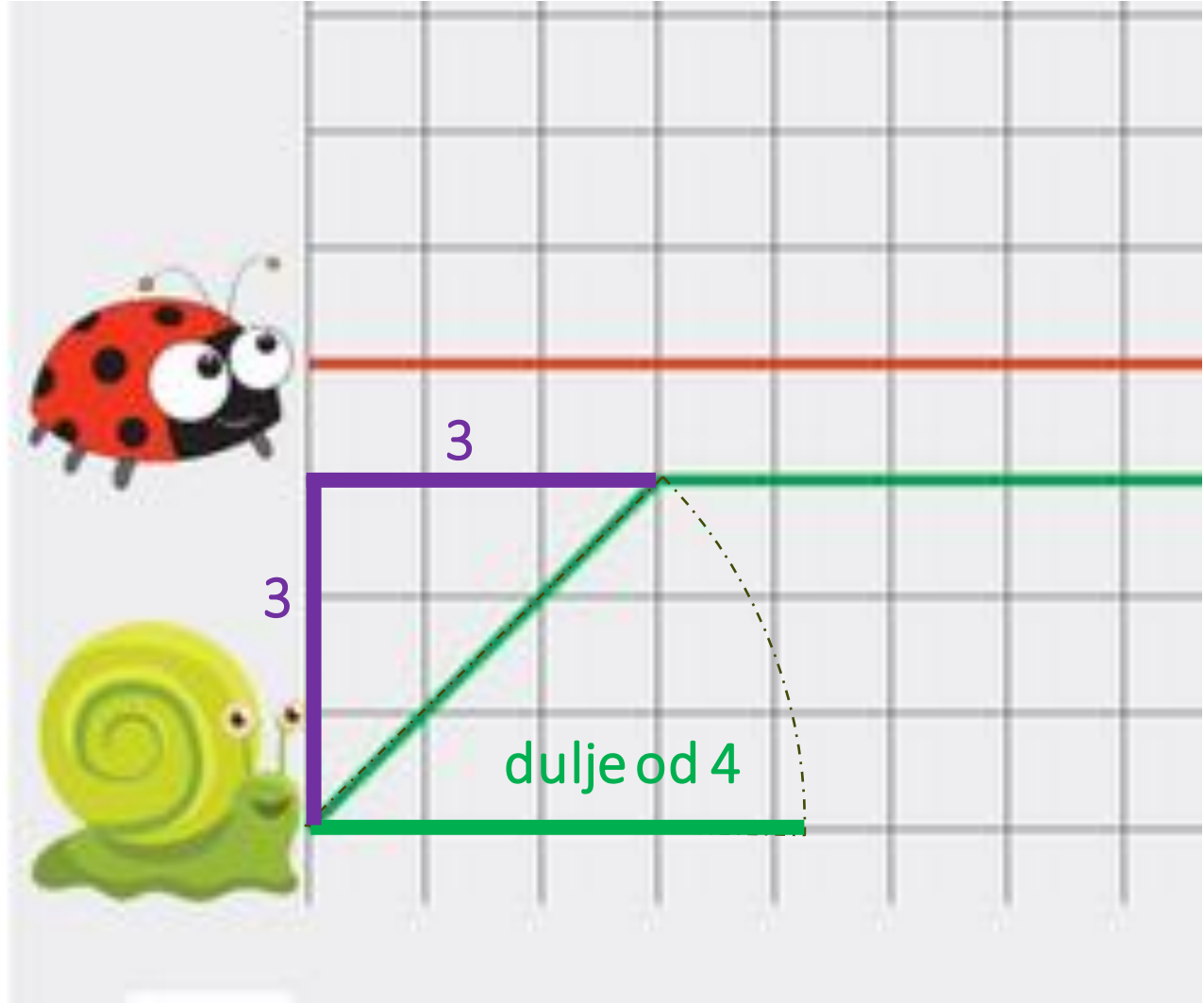


A. MRAV

B. BUBAMARA

C. PUŽ

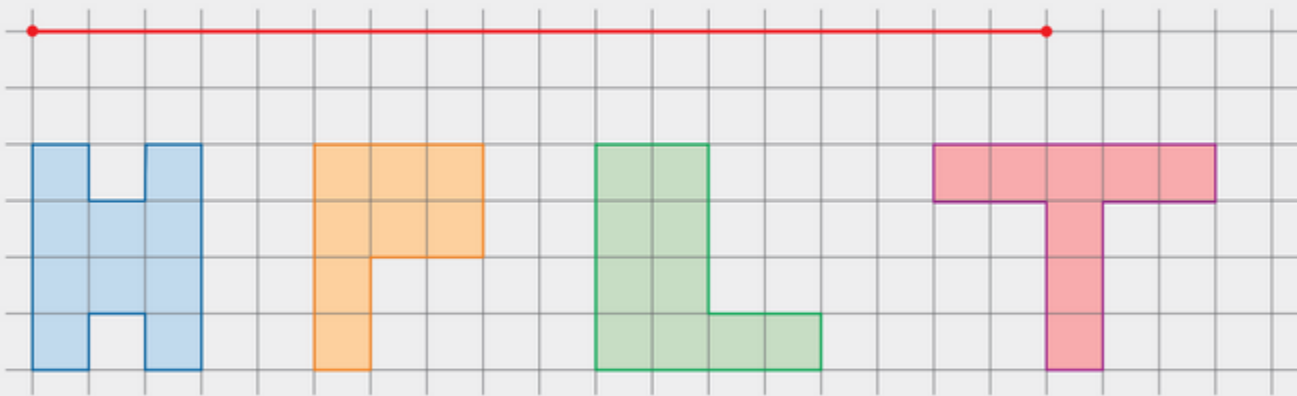
D. NIJE MOGUĆE ODREDITI



28.

BROJEVI DO 20

KOJA SLOVA IMAJU RUB DUG KAO NACRTANA DUŽINA?



A. H, L

B. P, L

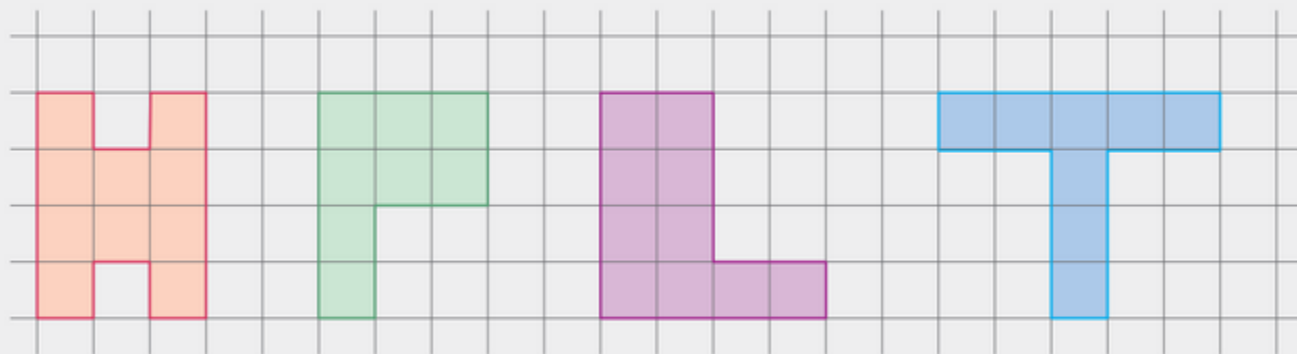
C. H, T

D. P, T

29.

BROJEVI DO 20

KOJA SLOVA PREKRIVAJU NAJMANJE KVADRATIĆA?



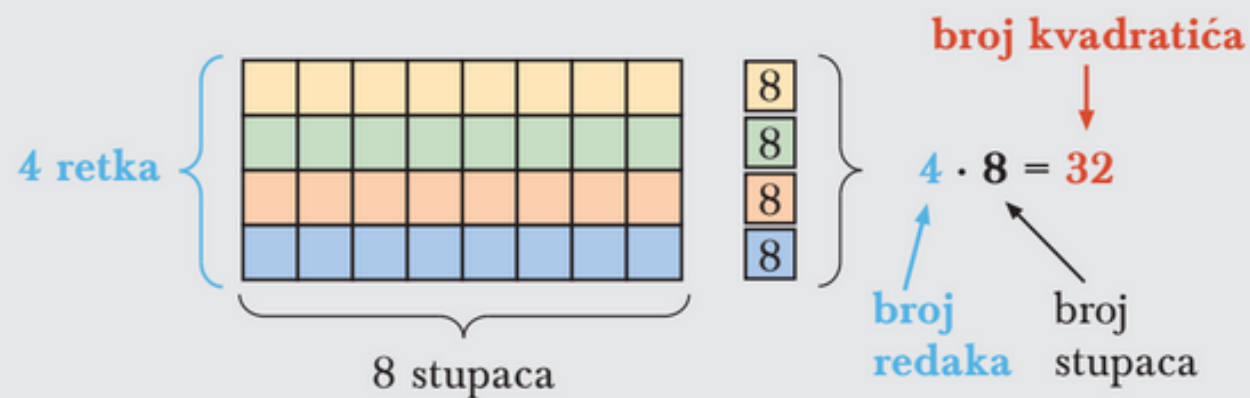
A. H, L

B. P, L

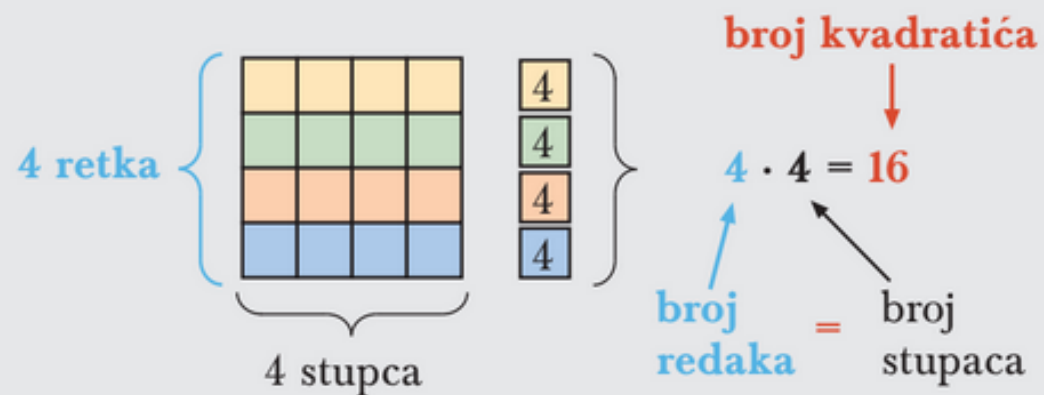
C. H, T

D. P, T

pravokutnik

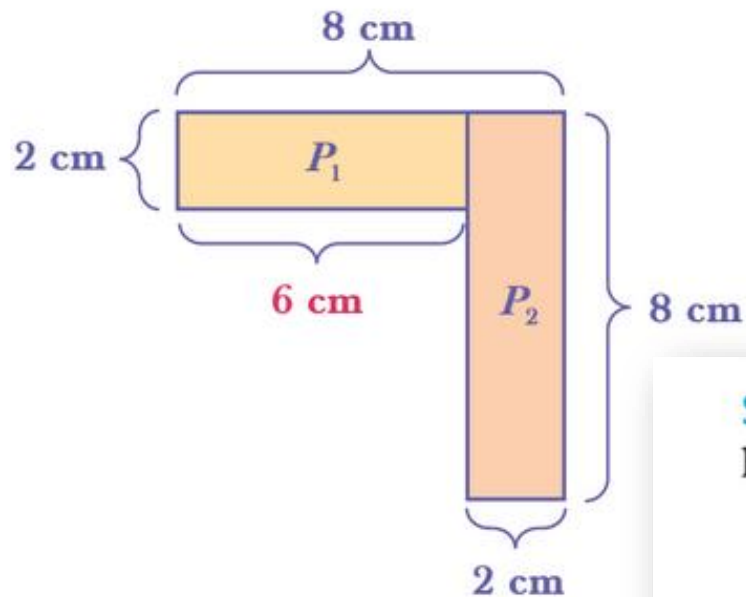


kvadrat

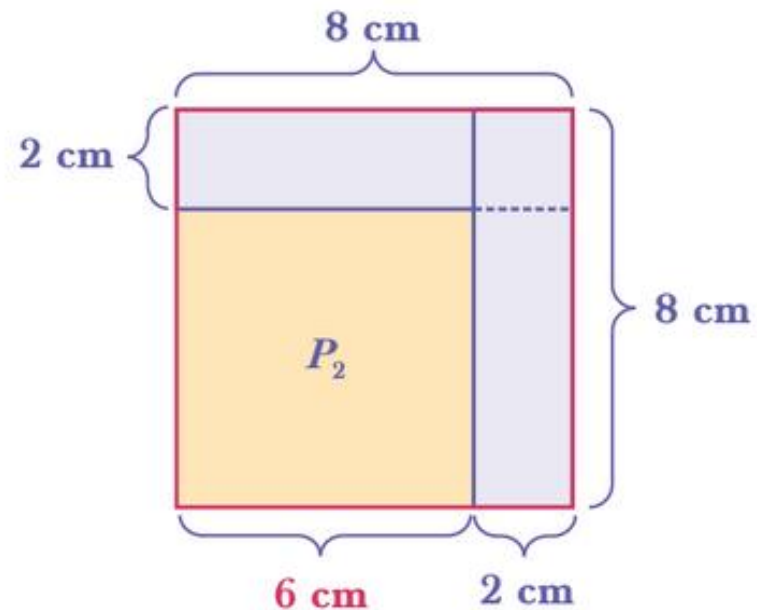


$$\text{broj redaka} \cdot \text{broj stupaca} = \text{broj kvadratića}$$

Strategija sjeckanja – podijelimo lik na više poznatih likova, pa traženu površinu dobivamo kao zbroj površina manjih likova od kojih se sastoji.

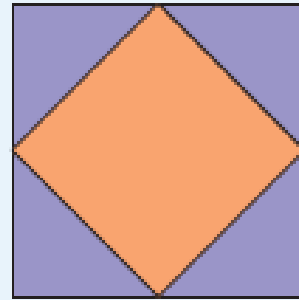
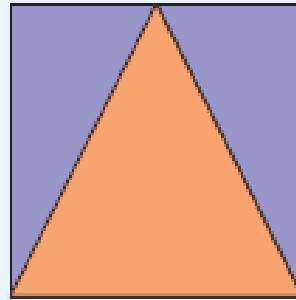
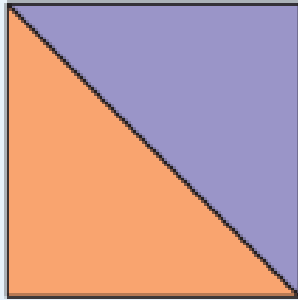
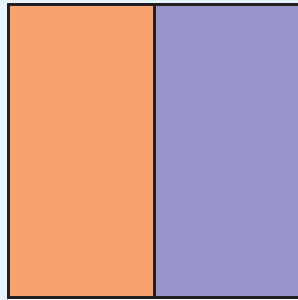


Strategija nadopunjavanja – proširimo promatrani lik na veći poznati lik, pa od njegove površine oduzimamo površine koje su nam "viška".





Zašto je $P = P$? Obrazložite.



$$P = P$$

Površina pravokutnog trokuta



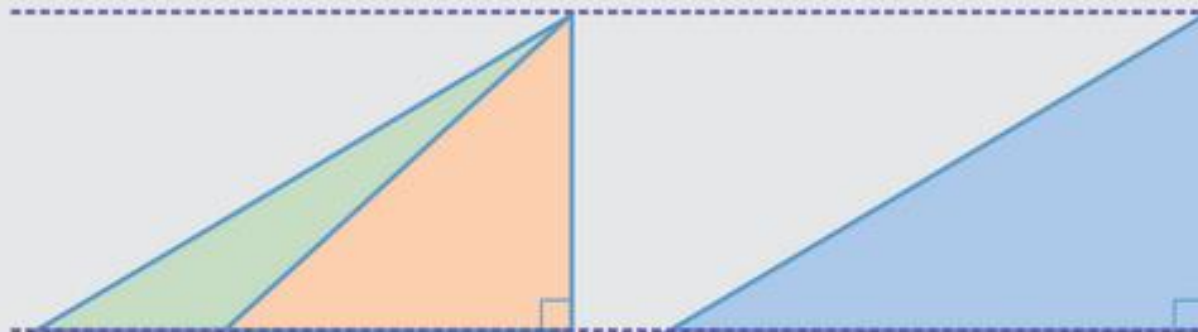
$$P_{\triangle} = P_{\square} : 2$$

Površina šiljastokutnog trokuta



$$P_{\triangle} = P_1 + P_2$$

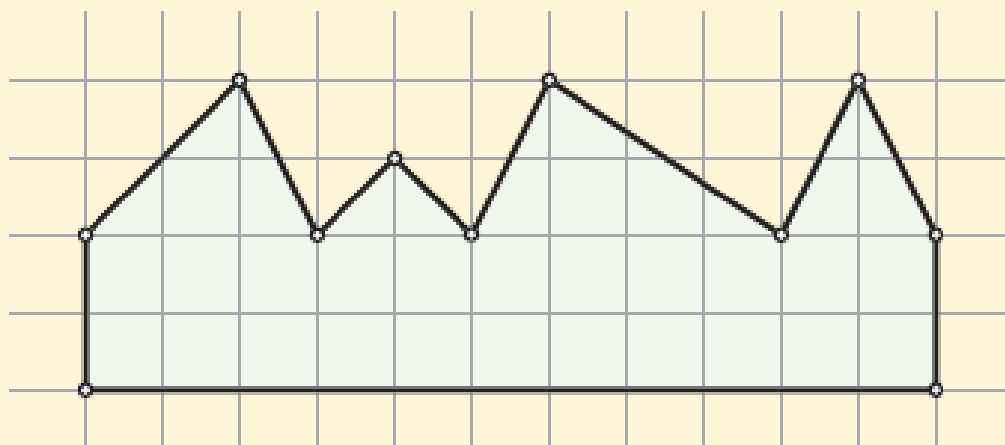
Površina tupokutnog trokuta



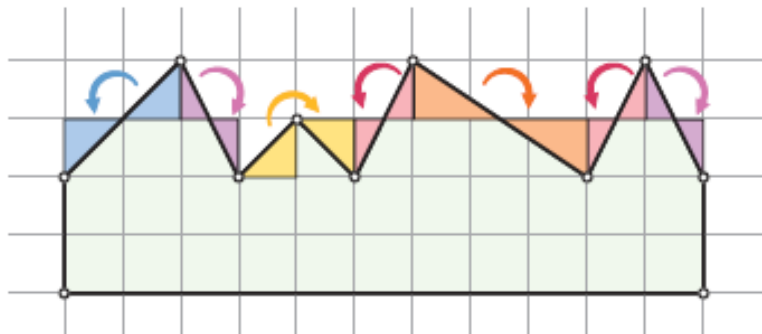
$$P_1 + P_2 = P_{\triangle}$$

$$P_1 = P_{\triangle} - P_2$$

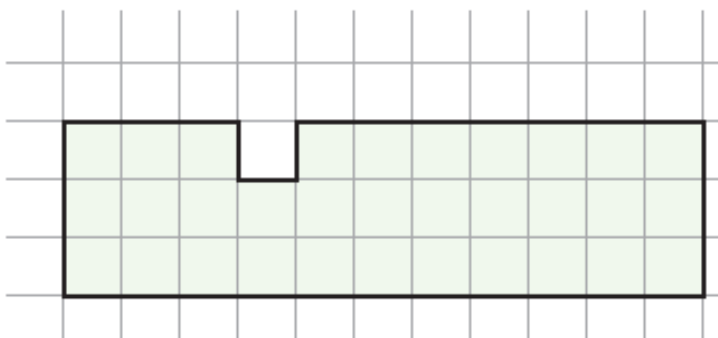
Paulina je razrezala nacrtani lik na slici po svim danim linijama i od dobivenih komadića slagala obojene kvadratiće. Koliko je najviše kvadratića mogla dobiti?

**A** 34**B** 32**C** 30**D** 28

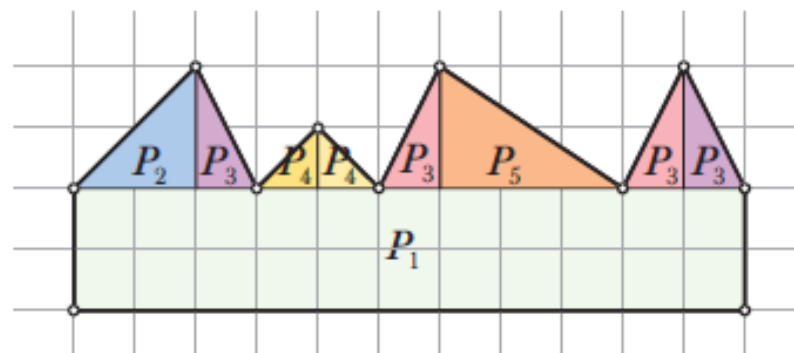
1. način. Želimo presložiti one dijelove nacrtanog lika koji nisu kvadrati tako da dobijemo što više kvadrata. Uočimo na slici jednake (sukladne) trokute.



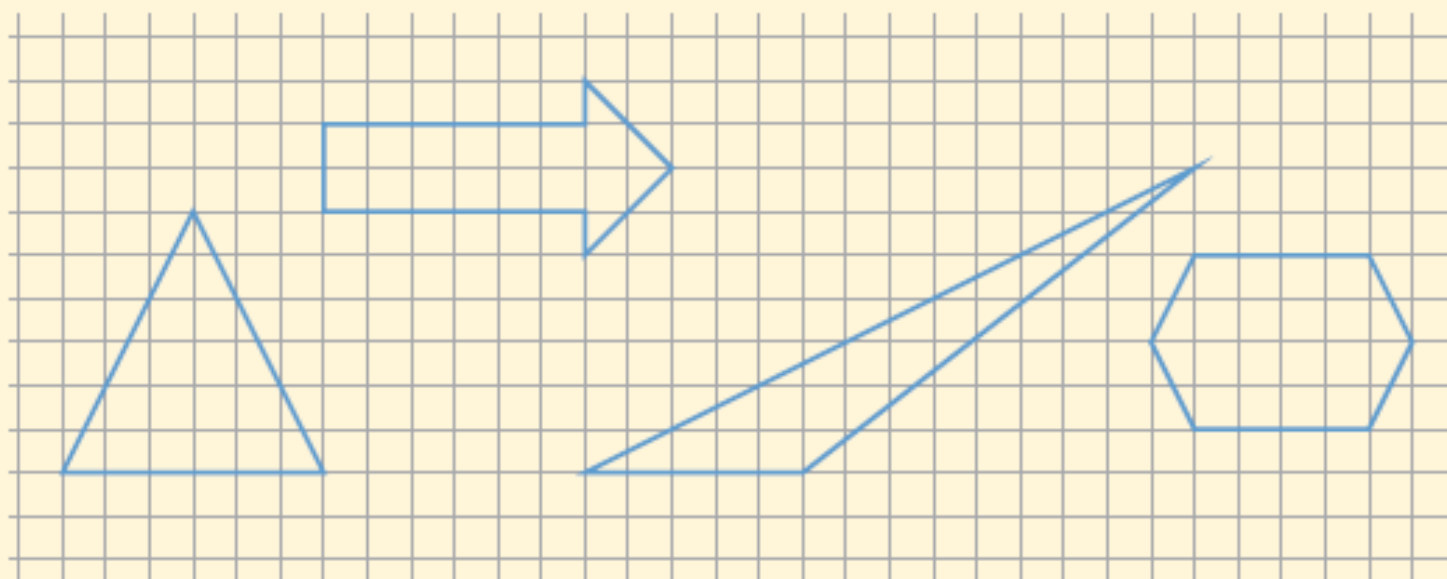
Nacrtajmo kako izgleda naš lik nakon preslagivanja.



2. način. Izračunajmo površinu danog lika tako da ga podijelimo na više poznatih likova (pravokutnik i pravokutni trokuti).



Koji od likova ima najveću površinu?



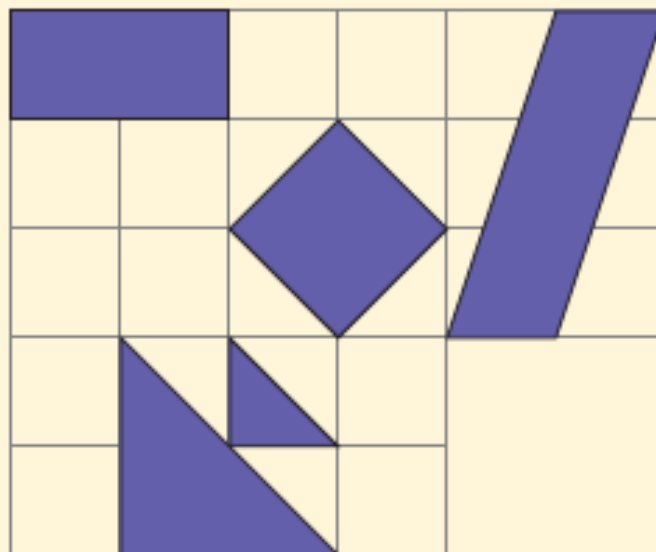
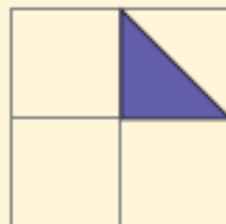
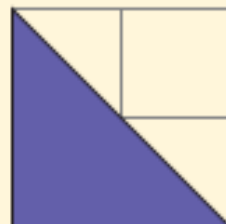
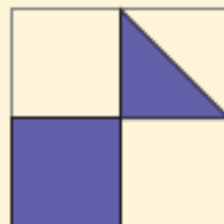
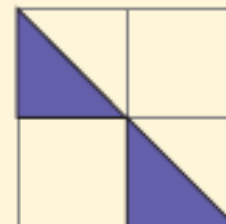
A jednakokrani trokut

B strelica

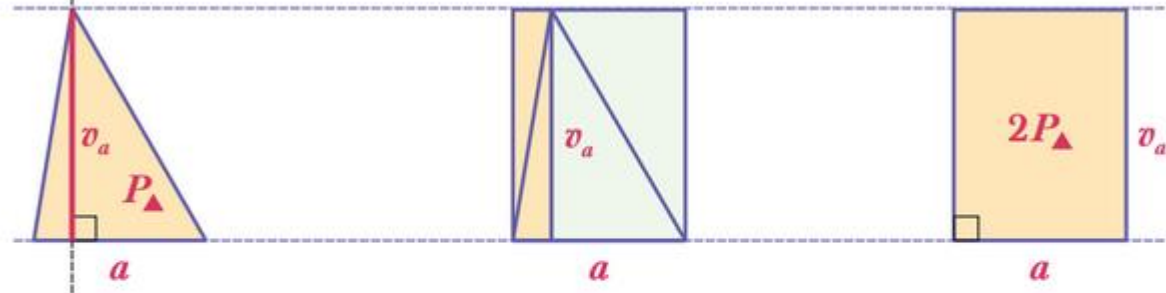
C tupokutan trokut

D šesterokut

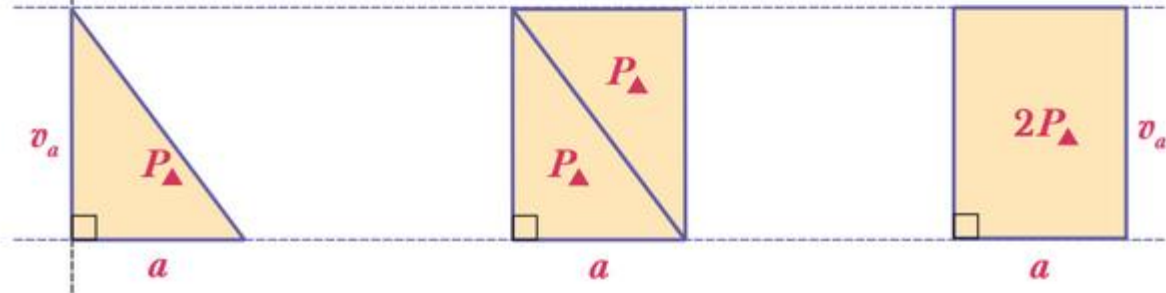
Koji kvadrat treba dodati slici da bi obojena površina bila dvostruko manja od neobojene površine?

**A****B****C****D**

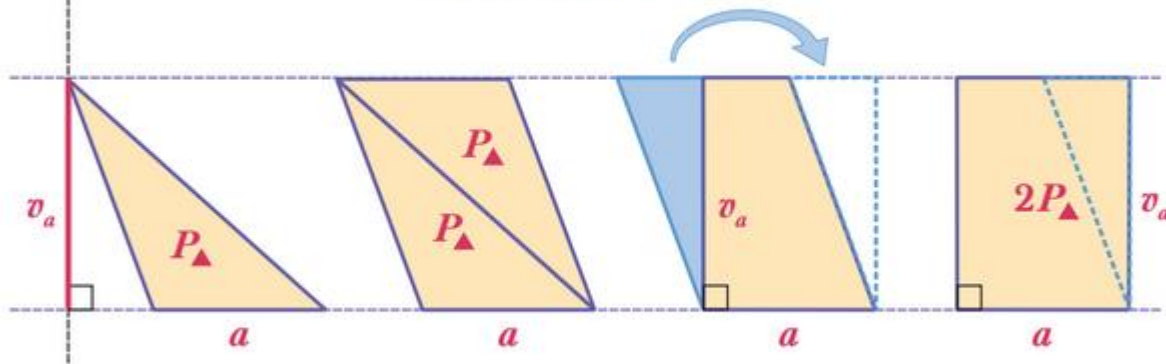
šiljastokutan trokut



pravokutan trokut



tupokutan trokut



$$P_{\triangle} = \frac{P_{\square}}{2} = \frac{av_a}{2}$$

„No, nedostaje svijest o tome da se matematika ne vježba, već razumije.

Naši udžbenici obiluju mnogobrojnim suhoparnim zadacima i premalo se naglasak stavlja na razumijevanje koncepata i motivacije za njihovo uvođenje.,,

Universitas portal,
19. 3. 2021.



The image shows a screenshot of a news article on the Universitas portal. The page features a navigation bar with the Universitas logo and menu items: NASLOVNA, AKTUALNO (highlighted), KOMENTARI, INTERVJUI, PROJEKTI, OBLJETNICE, and REPORTAŽE. Below the navigation is a large banner image showing a chalkboard with mathematical graphs and equations ($x+a=b$, $f(x)=\tan x$, $f(x)=\sin x$) and a close-up of a person's mouth. The article title is 'Matematiku ne treba vježbati nego razumjeti'. The breadcrumb trail is 'Naslovnica » Aktualno » Matematiku ne treba vježbati nego razumjeti'. There are category tags for 'Aktualno', 'Intervjui', 'Novosti', 'Studenti', and 'Znanost'. The author is listed as 'Branko Nad' and the date is '19. ožujka 2021.'.

universitas NASLOVNA AKTUALNO KOMENTARI INTERVJUI PROJEKTI OBLJETNICE REPORTAŽE

$x+a=b$
 $f(x)=\tan x$
 $f(x)=\sin x$

Naslovnica » Aktualno » Matematiku ne treba vježbati nego razumjeti

Aktualno Intervjui Novosti Studenti Znanost

Matematiku ne treba vježbati nego razumjeti

Međunarodni je dan matematike. Tim povodom razgovaramo s Matijom Bašićem i Željkom Milin Šipuš s Matematičkog odsjeka zagrebačkog PMF-a

Branko Nad · 19. ožujka 2021.

Literatura:

1. Zelčić, M., Nemeth, T., Radanović, P. (2024): MAT ligica, radna bilježnica s ekipnih natjecanja iz matematike u 1. razredu osnovne škole, Element, Zagreb

2. Zelčić, M., Nemeth, T. (2022): MAT liga 2-3-4, zbirka riješenih zadataka s ekipnih natjecanja iz matematike u 2., 3. i 4. razredu osnovne škole, 2. dio, Element, Zagreb

3. Zelčić, M., Nemeth, T. (2023): MAT liga 5-6, Geometrija, zbirka riješenih zadataka za dodatnu nastavu iz matematike u 5. i 6. razredu osnovne škole, Element, Zagreb

4. <http://matzelcic.com.hr/mat-liga/>

5. https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html



Pitanja ?

Ako imate dodatnih pitanja, obratite nam se mailom.

Za razliku od ostalih lijekova, ovaj nije propisan samo Vama. Možete ga davati drugima. Neće im naškoditi, čak i ako su njihovi znakovi bolesti različiti od Vaših. 😊

zlata.hrzina@gmail.com

mzelcic@gmail.com

Evaluacijski upitnik



Hvala
na pažnji !