

# DOKAZ U SREDNJOŠKOLSKOJ MATEMATICI

10. kongres nastavnika matematike RH, Zagreb, 1. i 2. srpnja 2024.

Josipa Pavlić, prof.

[josipa.pavlic@skole.hr](mailto:josipa.pavlic@skole.hr)

Gimnazija Sesvete, Zagreb

1

## Sadržaj

1 PRISTUPI DOKAZIVANJU

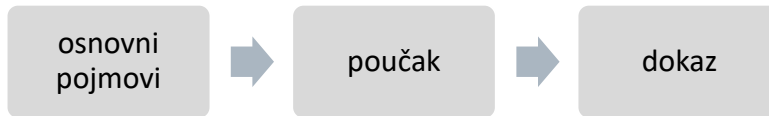
2 VOĐENO DOKAZIVANJE

3 FORMA DOKAZA

2

## Pristupi dokazivanju u srednjoj školi

### Tradicionalni pristup



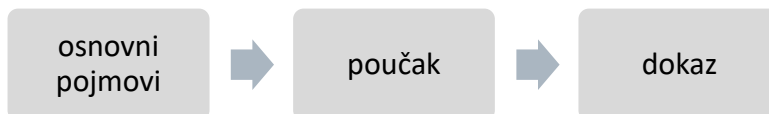
### upotpuniti s



3

## Pristupi dokazivanju u srednjoj školi

### Tradicionalni pristup



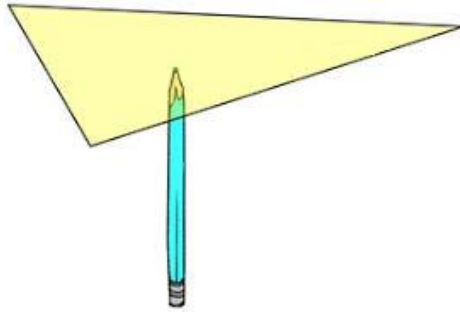
### zamijeniti s



4

## Pr. 1. Poučak o težištu trokuta

### 1. aktivnost - motivacijska aktivnost:



Slika preuzeta s <https://mathbitsnotebook.com/Geometry/Constructions/CCCentroid.html>

5

## Pr. 1. Poučak o težištu trokuta

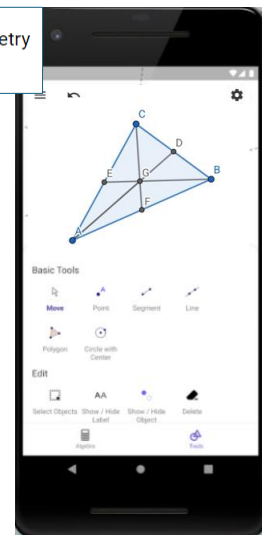
### 2. aktivnost - istraživačka aktivnost



App: GeoGebra Geometry  
GeoGebra

- Konstruirajte trokut  $\triangle ABC$
- Konstruirajte polovišta stranica trokuta  $\triangle ABC$
- Konstruirajte težišnice svih triju stranica
- Pomicanjem vrhova trokuta promatrajte različite trokute.

- Što uočavate? Zapišite svoja zapažanja.
- Sada izmjerite na nekoj od težišnica koliko je težište udaljeno od vrha trokuta i koliko je udaljeno od polovišta stranice. Što uočavate? Zapišite svoja zapažanja. Provjerite i za ostale težišnice svoje nagađanje.



### 3. aktivnost - iskaz Poučka o težištu trokuta

6

## Dokazivanje i načelo primjerenosti

### 4. aktivnost - dokaz

„Za dokaz nekog poučka na nastavnom satu treba imati **pripremljen niz primjerenih pitanja za brzo sagledavanje poučka od strane učenika i uspješno vođenje metode razgovora**. To pospješuje ostvarenje postavljenog cilja nastavnog sata na primjeren način.”

(Z. Kurnik)

- Razgovor koji bi se vodio s učenicima u frontalnom radu preoblikovati u aktivnost za učenike
- Dati zadatke i postavljati pitanja koja usmjeravaju razmišljanja učenika

7

### Pr. 1. Poučak o težištu trokuta - dokaz

Možete se služiti aplikacijom Geogebra Geometry.

[bit.ly/dokaz01](https://bit.ly/dokaz01)

Skicirajte trokut  $ABC$  te polovište stranice  $\overline{BC}$  označite s  $A_1$ , a polovište stranice  $\overline{AC}$  s  $B_1$ .

(i) Što znate o dužini  $\overline{A_1B_1}$ ? \_\_\_\_\_



Nacrtajte težišnice  $\overline{AA_1}$  i  $\overline{BB_1}$  te njihovo sjecište označite s  $T$ .

Istaknite polovište  $D$  dužine  $\overline{AT}$  i polovište  $E$  dužine  $\overline{BT}$ . Činjenica da su točke  $D$  i  $T$  polovišta znači: (ii)  $|TD| =$  \_\_\_\_\_ i (iii)  $|TE| =$  \_\_\_\_\_ .

...

8

## Pr. 1. Poučak o težištu trokuta - dokaz

[bit.ly/dokaz01](https://bit.ly/dokaz01)

Što znate o dužini  $\overline{DE}$  u trokutu  $ABT$ ? (iv) \_\_\_\_\_

Promatrajte sada trokute  $DET$  i  $A_1B_1T$ .

(v) Trokuti  $DET$  i  $A_1B_1T$  su \_\_\_\_\_.

Obrazložite. \_\_\_\_\_

Što je posljedica od (v)?  $|TD| =$  \_\_\_\_\_ pa ako usporedimo s (ii) dobiva se da točke  $D$  i  $T$  dijele težišnicu  $\overline{AA_1}$  na \_\_\_\_\_ tj.

$|AT|:|TA_1| =$  \_\_\_\_\_ .

...



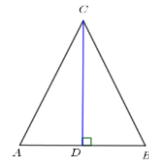
9

## Pr. 2. Tablični prikaz dokaza („two-column” proof)

Ako je trokut jednakokrakan, tada visina na osnovicu siječe stranicu u njenom polovištu.

**Pretpostavka:**  $\triangle ABC$  jednakokraki ( $|AC| = |BC|$ )

**Tvrdnja:** visina na osnovicu  $\overline{AB}$  siječe osnovicu u njenom polovištu



Tvrdnja	Obrazloženje
$\triangle ABC$ jednakokraki trokut	pretpostavka
$\overline{CD}$ visina na osnovicu	pretpostavka
$\overline{CD}$ $ AC  =  BC $ $ \sphericalangle ADC  =  \sphericalangle BDC  = 90^\circ$	zajednička stranica trokuta $\triangle ADC$ i $\triangle BDC$ pretpostavka definicija visine
$\triangle ADC \cong \triangle BDC$	S-S-K poučak o sukladnosti
$ AD  =  BD $	slijedi iz sukladnosti $\triangle ADC$ i $\triangle BDC$
$D$ je polovište dužine $\overline{AB}$	zaključak

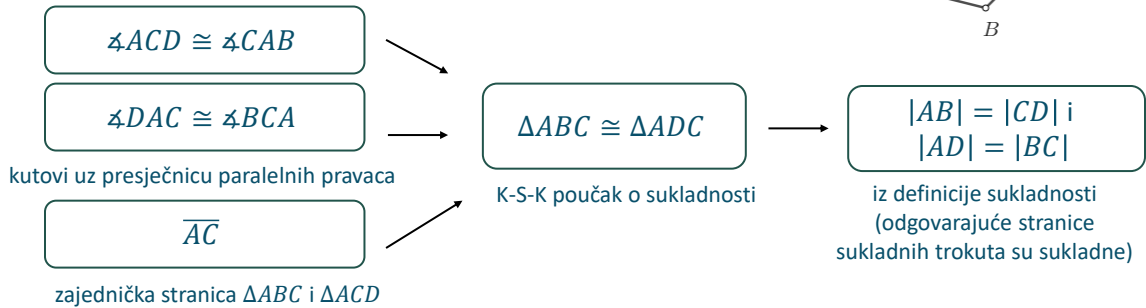
10

### Pr. 3. Prikaz dokaza pomoću dijagrama („flow-chart” proof)

**Pretpostavka:**  $AB \parallel CD$  i  $AD \parallel BC$ .

**Tvrdnja:**  $|AB| = |CD|$  i  $|AD| = |BC|$

**Dokaz:**



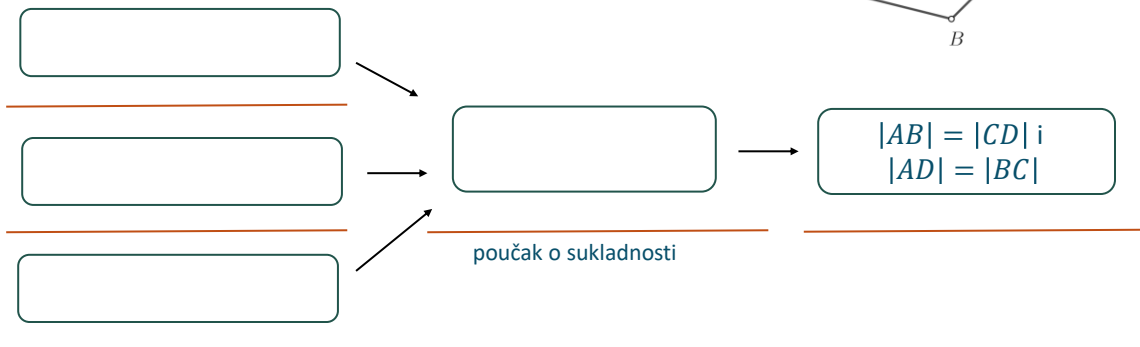
11

### Pr. 3. Otvoreni dokazi pomoću dijagrama („flow-chart” proof)

**Pretpostavka:**

**Tvrdnja:**  $|AB| = |CD|$  i  $|AD| = |BC|$

**Dokaz:**



Više vidjeti na: [www.researchgate.net/figure/An-example-of-flowchart-proofs-with-open-problems](http://www.researchgate.net/figure/An-example-of-flowchart-proofs-with-open-problems)

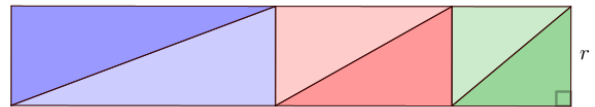
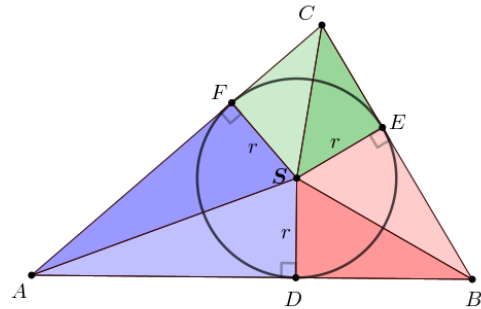
12

## Pr. 4. Vizulni dokaz

Koju formulu krije ova slika?

Pomoć:

- Obratite pozornost na boje.
- Može li se nešto zaključiti o trokutima na slici? Što? Obrazložite.
- Uvedite dodatne oznake.
- Usporedite gornji i donji dio slike.



13

## Pr. 5. Dokaz iracionalnosti broja $\sqrt{2}$ .

Tvrdnja: **Broj  $\sqrt{2}$  je iracionalan broj.**

Dokaz:

(1) Pretpostavimo suprotno tj.  $\sqrt{2}$  je racionalan broj.

(2) Po definiciji racionalnog broja je  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ,  $a$  i  $b$  su prirodni brojevi

(3) Kvadriraj (2)  $\Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$

(4) Nakon kvadriranja (2) i pojednostavlivanja dobiva se

$$a^2 = 2b^2$$

(5) Razmisli, je li **broj prostih faktora** brojeva

u dobivenoj jednakosti **paran ili neparan.**

Broj  $a^2$  ima **paran broj prostih faktora**, a broj  $2b^2$  **neparan broj prostih faktora**

(6) **Kontradikcija.** Dakle, pretpostavka je bila kriva odnosno  $\sqrt{2}$  nije racionalan broj.

(7)  $\sqrt{2}$  je iracionalan broj

Dokaz preuzet s [www.cut-the-knot.org/proofs/sq\\_root.shtml](http://www.cut-the-knot.org/proofs/sq_root.shtml)

14

## Pr. 5. Dokaz iracionalnosti broja $\sqrt{2}$ .

### Prije dokaza: Ponavljanje rastava broja na proste faktore

Neka je $a \in \mathbf{N}$ .				Obrazloženje
1. Broj $a$ u svom rastavu na proste faktore ima paran broj prostih faktora. Nikad                  Ponekad                  Uvijek				
2. Broj $a^2$ u svom rastavu na proste faktore ima paran broj prostih faktora. Nikad                  Ponekad                  Uvijek				
3. Broj $3a^2$ u svom rastavu na proste faktore ima paran broj prostih faktora. Nikad                  Ponekad                  Uvijek				

15

## Pr. 5. Dokaz iracionalnosti broja $\sqrt{2}$ .

### Prije dokaza – motivacijska aktivnost

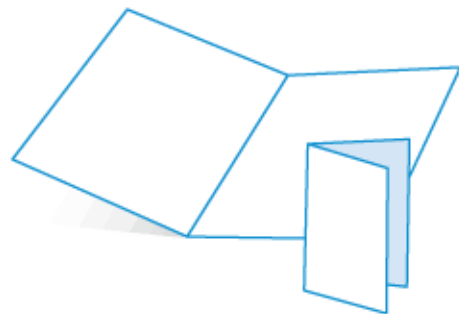
Postoji li pravokutnik sa sljedećim svojstvom:

kad ga presavijemo na pola, duljine stranica dobivene polovice pravokutnika u istom su omjeru kao i stranice početnog pravokutnika?

**Rj.**

Postoji ( $d:k = k:\frac{d}{2} \Rightarrow d = \sqrt{2}k$ )

**A formati papira** (A0 ima površinu  $1 \text{ m}^2$ )



Slika preuzeta s <https://cheaps.factorystore2024.ru/category?name=paper%20folded%20in%20half>

16



## Pružanje podrške pri dokazivanju („scaffolding“)

- **Postavljati pitanja koja usmjeravaju razmišljanja učenika**
- Osigurati poznavanje potrebnih pojmova, definicija, ...
- **Osigurati motivirajuće okruženje za dokazivanje**
- Postupno povećavati složenost tvrdnji koje se dokazuju
- Pokazati primjerom kako se dokazuje
- **Promijeniti formu dokaza**
- Težiti jednostavnosti dokaza



Slika preuzeta s: <https://www.edutopia.org/blog/scaffolding-lessons-six-strategies-rebecca-alber>

17

## Literatura

- [1] Kurnik, Z. (2009.): Dedukcija, Matematika i škola, br. 51, str. 5-11
- [2] Kurnik, Z. (2009.): Načelo primjerenosti, Matematika i škola, br. 48, str. 100 - 105
- [3] Kurnik, Z. (2001.): Dokaz, Matematika i škola, br. 9, str. 149-155
- [4] Kurnik Z., (2013.): Oblici matematičkog mišljenja, Element
- [5] Making Mathematics: Teacher Handbook (edc.org) (15.3.2024.)
- [6] Michael de Villiers (2021): Dokazivanje i dokaz u nastavi matematike pomoću Sketchpada & drugi tekstovi, HUNI Zagreb
- [7] Bašić M., (2020.): AHA! Putovanje u središte problema, Matkina biblioteka, HMD
- [8] [www.cut-the-knot.org/proofs/sq\\_root.shtml](http://www.cut-the-knot.org/proofs/sq_root.shtml)
- [9] [www.researchgate.net/figure/An-example-of-flowchart-proofs-with-open-problems](http://www.researchgate.net/figure/An-example-of-flowchart-proofs-with-open-problems) (20.3.2024.)

18