ALGEBARSKE PLOČICE - GEOMETRIJSKI PRISTUP ALGEBARSKIM KONCEPTIMA

IVANA KATALENAC, PROF., UČITELJ IZVRSTAN SAVJETNIK

OSNOVNA ŠKOLA TRNSKO, ZAGREB

- Algebarske su pločice su vrlo moćan alat u poučavanju matematike koji učenicima pomaže u shvaćanju algebarskih koncepata.
- Modelirajući algebarskim pločicama učenici razvijaju algebarsko mišljenje i pridaju vizualna značenja matematičkim konceptima, a učenje od konkretnog k apstraktnom je ključno kako bi učenici znali primijeniti naučene matematičke koncepte na usvajanje novih.

- Korištenje manipulativnih materijala važna je faza u razvoju razumijevanja učenika.

Ova se faza često izostavlja u višim razredima osnovne škole i u srednjoj školi, gdje se manipulatori doživljavaju kao 'djetinjasti'. Davanje učenicima mogućnosti 'igrati se' s pločicama može im pomoći vidjeti i osjetiti što se događa te im stoga može pomoći razviti dublje razumijevanje formalnih algoritama

- Druga faza je prikazna ili slikovna.

U ovoj se fazi od učenika traži da nacrtaju dijagram ili slikaju ono što su radili. To može biti samo slikovna verzija konačnog rasporeda pločica ili složeniji crtež koji objašnjava kako su manipulirali pločicama.

- U apstraktnoj fazi učenici se kreću prema korištenju brojeva i simbola kako bi pokazali svoje razmišljanje i razumijevanje. Učenici će razviti (ili im se pokazati) formalni algoritam rješavanje problema.

Neki će se učenici kretati od konkretnog preko reprezentativnog do apstraktnog, a drugi će skakutati uokolo.

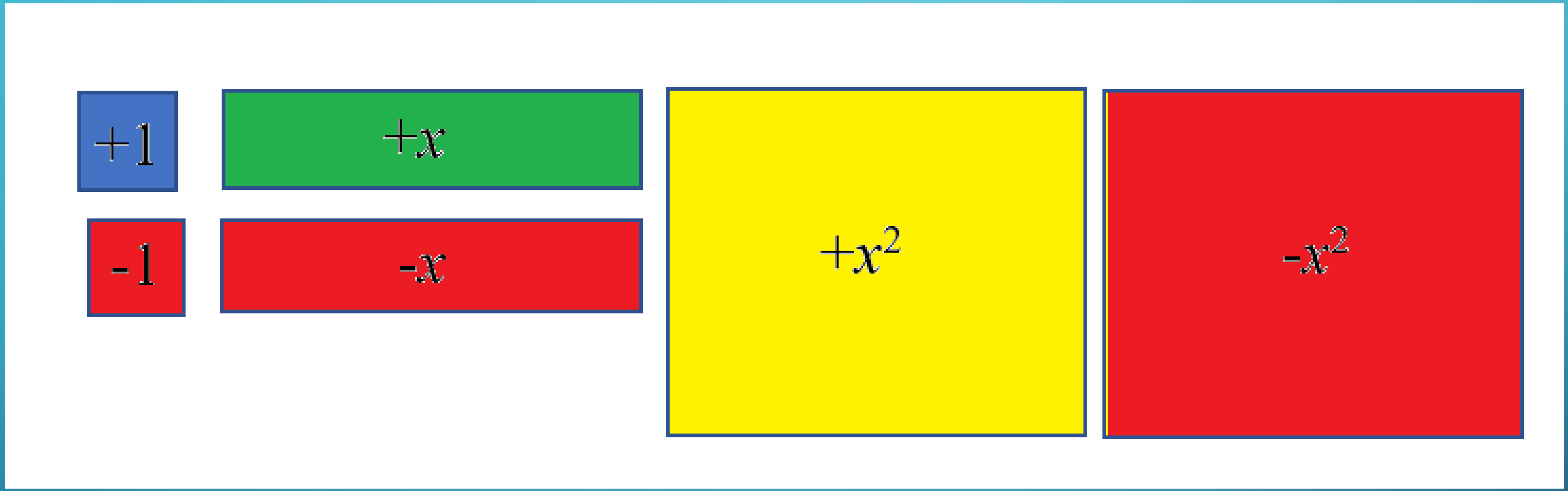
- Važno je na raspolaganju imati konkretne materijale onima koji ih žele koristiti, a učenici bi se trebali osjećati ugodno i samopouzdano koristeći ih.

Algebarske se pločice mogu koristiti za podučavanje:

- zbrajanja i oduzimanja cijelih brojeva
- množenja i dijeljenja cijelih brojeva
- svojstva distributivnosti
- pojednostavljivanja algebarskih izraza
- rješavanja linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom
- množenja binoma
- faktorizacije trinoma

UPOZNAVANJE S PLOČICAMA

U kompletu algebarskih pločica postoje tri različite pločice, svaka s dvije boje, koje predstavljaju pozitivne i negativne vrijednosti.

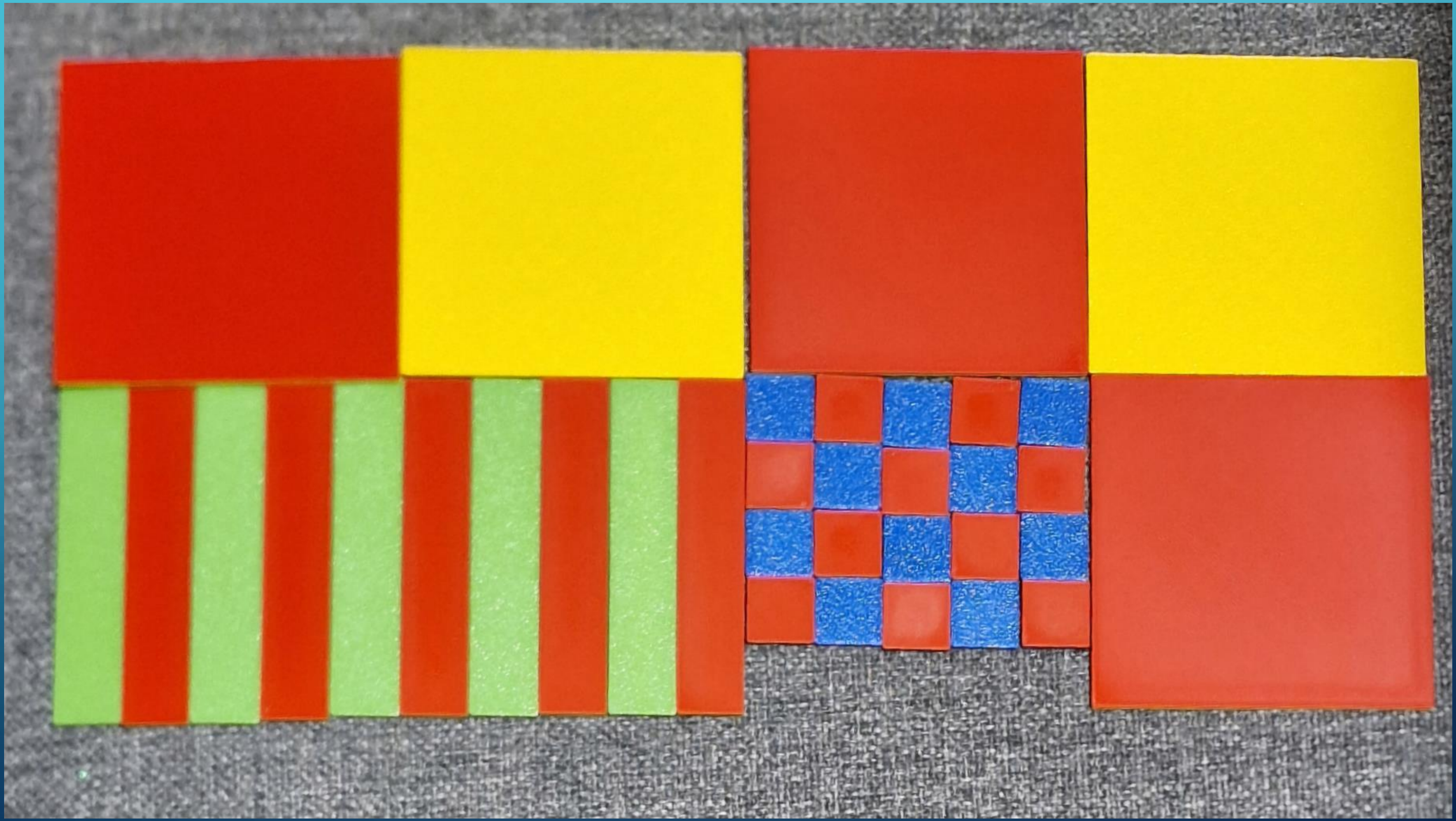


UPOZNAVANJE S PLOČICAMA

U kompletu algebarskih pločica postoje tri različite pločice, svaka s dvije boje, koje predstavljaju pozitivne i negativne vrijednosti.

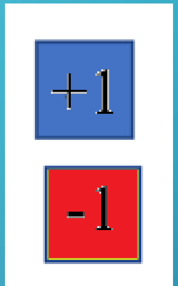
UPOZNAVANJE S PLOČICAMA

U kompletu algebarskih pločica postoje tri različite pločice, svaka s dvije boje, koje predstavljaju pozitivne i negativne vrijednosti.

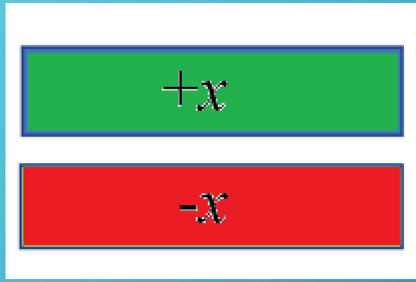


UPOZNAVANJE S PLOČICAMA

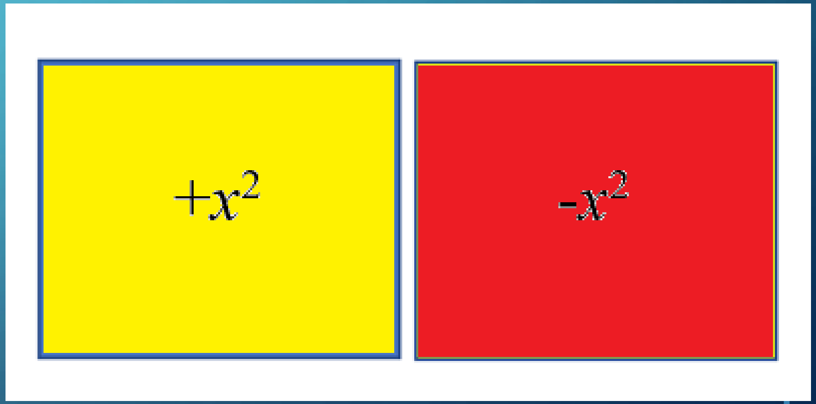
Najmanja pločica je 1 puta 1 koja predstavlja konstantu +1 ili -1.



Sljedeća pločica je 1 puta x, predstavlja +x ili -x.



Najveća pločica je x puta x, što predstavlja $+x^2$ ili $-x^2$.



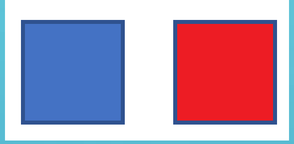
Dimenzija x namjerno nije ekvivalentna fiksnom broju pojedinačnih jedinica u smislu veličine. Ovo je tako da učenici ne povezuju duljinu x s nekom određenom vrijednošću.

UPOZNAVANJE S PLOČICAMA – ZBROJ 0

Ovaj koncept je ključan za razumijevanje algebarskih pločica.

Dvije boje predstavljaju pozitivne i negativne vrijednosti.

Pokažite učenicima dvije pločice, iste veličine ali različitih boja:

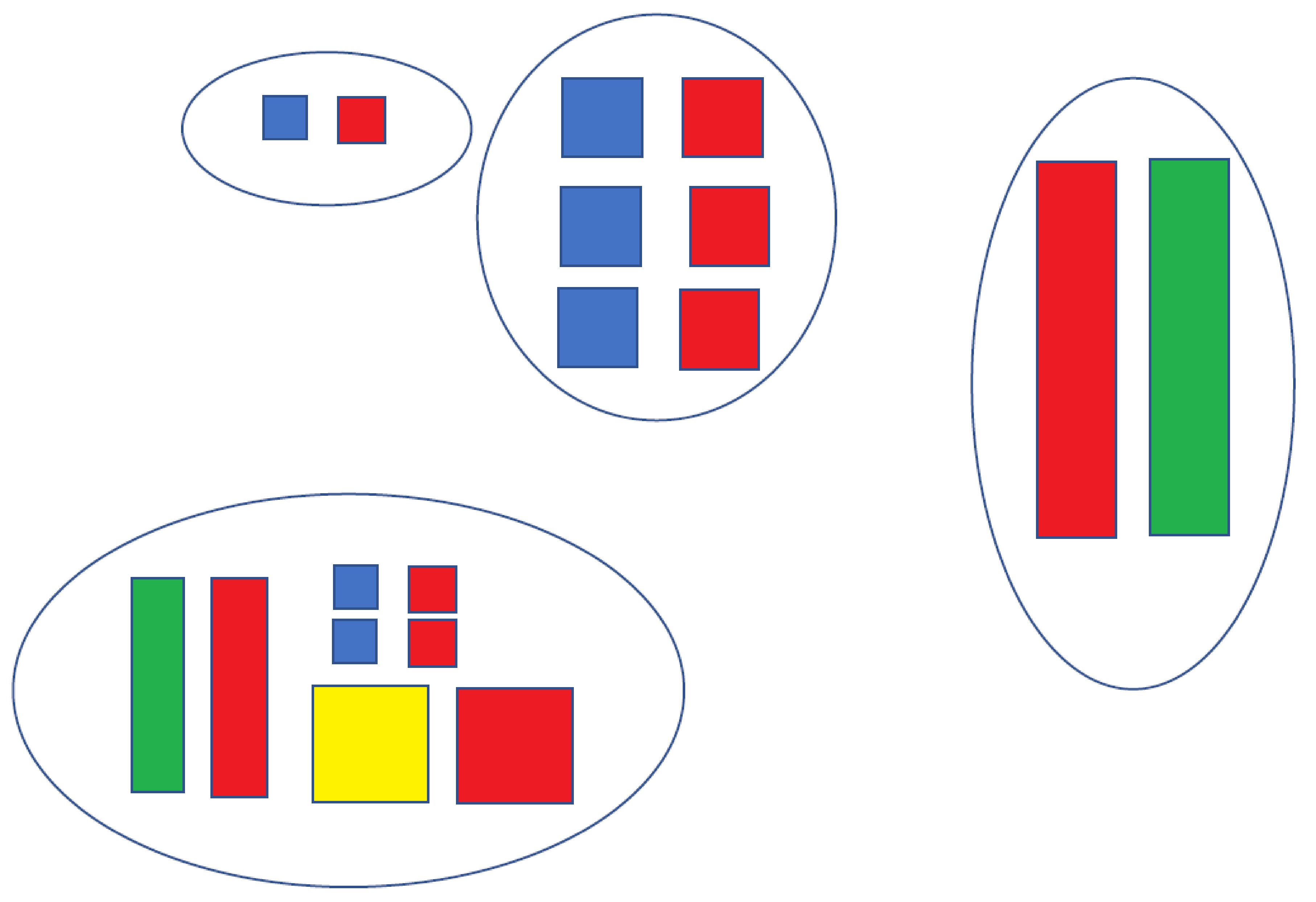


Pitajte učenike što vide isto, a što različito.

Jedan kvadratić predstavlja pozitivnu vrijednost, a jedan negativnu vrijednost iste veličine. Kada se spoje zajedno, oni čine nulu, kao što je $-1 + 1 = 0$.

To se naziva princip nule, a dvije pločice tvore par nulte sume.

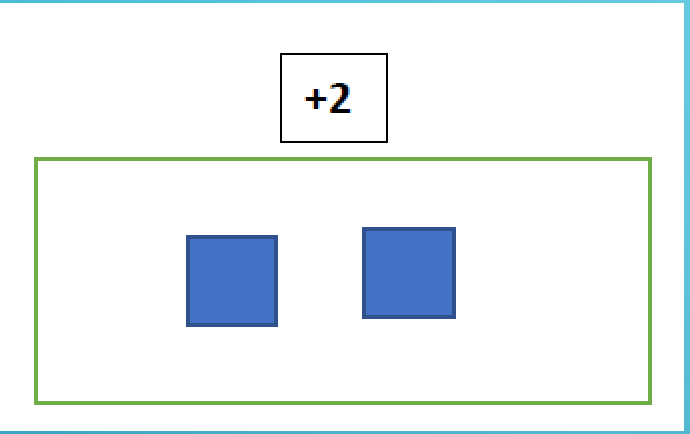
UPOZNAVANJE S PLOČICAMA – ZBROJ 0



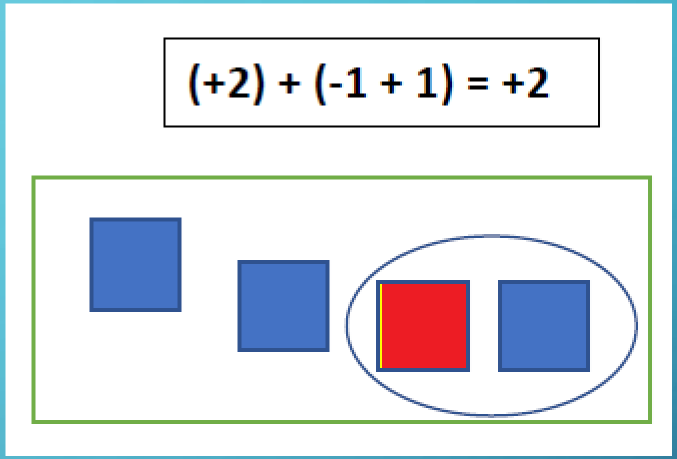
MODELIRANJE BROJEVA

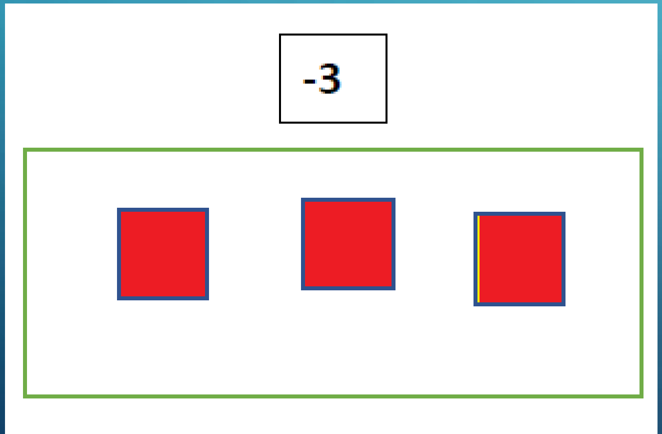
- Učenici modeliraju brojeve na različite načine.

Npr.

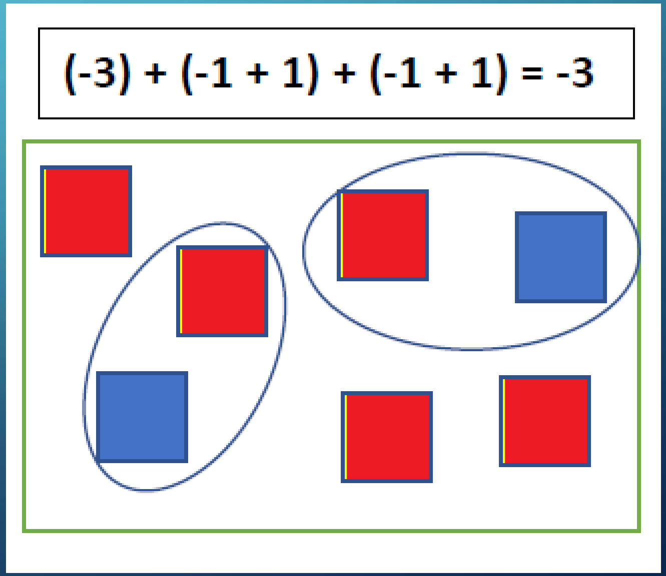


ili





ili



ZBRAJANJE I ODUZIMANJE CIJELIH BROJEVA

(+3) + (+1) =

(-2) + (-1) =

ZBRAJANJE I ODUZIMANJE CIJELIH BROJEVA

(+3) + (-1) = 

(+4) + (-4) = 

(+2) + (-6) = 

Nakon što učenici vide puno primjera neka samostalno formuliraju pravilo zbrajanja cijelih brojeva.

ZBRAJANJE I ODUZIMANJE CIJELIH BROJEVA

Oduzimanje se može protumačiti kao „micanje".

$(+5) - (+2) =$

ZBRAJANJE I ODUZIMANJE CIJELIH BROJEVA

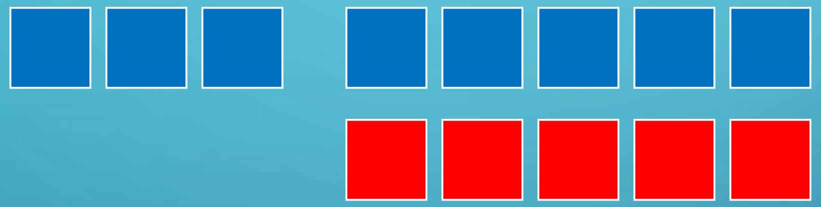
Oduzimanje se može protumačiti kao „micanje".

$(-4) - (-3) =$

ZBRAJANJE I ODUZIMANJE CIJELIH BROJEVA

Oduzimanje se može protumačiti kao „micanje".

(+3) – (-5)



ZBRAJANJE I ODUZIMANJE CIJELIH BROJEVA

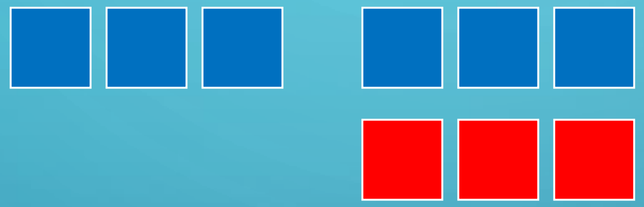
Oduzimanje se može protumačiti kao „micanje".

(-4) – (+1)

ZBRAJANJE I ODUZIMANJE CIJELIH BROJEVA

Oduzimanje se može protumačiti kao „micanje".

(+3) – (-3)



ILI

ZBRAJANJE I ODUZIMANJE CIJELIH BROJEVA

Oduzimanje se također može smatrati "dodavanjem suprotnoga".

$(+3) - (-3)$

Nakon što učenici vide puno primjera neka samostalno formuliraju pravilo oduzimanja cijelih brojeva.

ZBRAJANJE I ODUZIMANJE CIJELIH BROJEVA

Za svaki od navedenih zadataka upotrijebite algebarske pločice za modeliranje.

a) 5 + 3

b) -5 + (-3)

c) 2 + (-4)

d) -3 + (-1)

e) -4 + (-2) + 1

f) 8 – 4

g) -7 – (-3)

h) 2 – (-6)

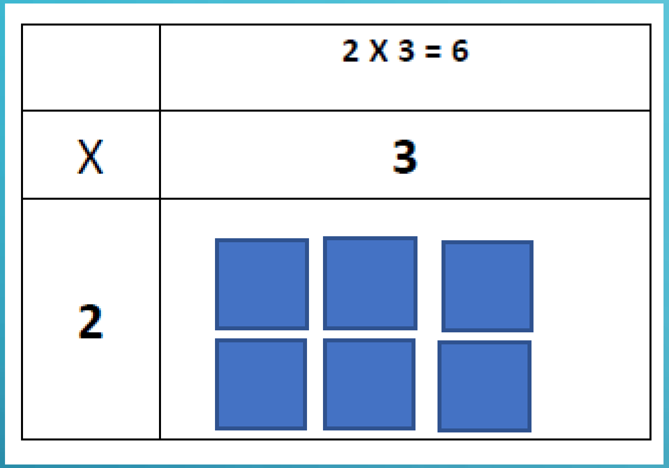
i) -5 – (+2)

j) -6 + (-1) – (-3)

k) 3 – 6 + (-2)

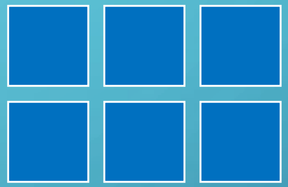
MNOŽENJE CIJELIH BROJEVA

Umnožak dvaju cijelih brojeva možemo odrediti slaganjem algebarskih pločica u pravokutnik.

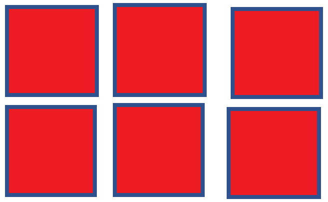


$(+2) \cdot (+3) =$

ILI

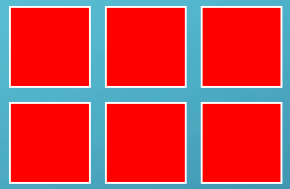


MNOŽENJE CIJELIH BROJEVA

	2 X -3 = -6
X	**-3**
2	

$(+2) \cdot (-3) =$

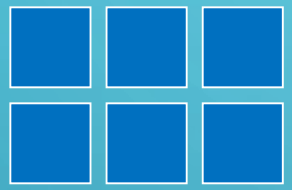
ILI



MNOŽENJE CIJELIH BROJEVA

Ako je prvi faktor negativan okrenite pločice tj. odredite suprotno.

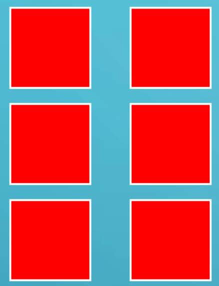
$(-2) \cdot (+3) =$



MNOŽENJE CIJELIH BROJEVA

Ako je prvi faktor negativan okrenite pločice tj. odredite suprotno od.

$(-3) \cdot (-2) =$



Nakon što učenici vide puno primjera neka samostalno formuliraju pravilo množenja cijelih brojeva i neka ga primijene na većim brojevima.

MNOŽENJE CIJELIH BROJEVA

Model površine je koristan kada se promatra množenje velikih brojeva i brojevi za raspodjelu.

27 x 43

x	**20**	**7**
40	40 x 20 = 800	40 x 7 =280
3	3 x 20 = 60	3 x 7 = 21

27 x 43 = 800 + 280 + 60 + 21 = 1161

Ovaj je model također uvod u množenje linearnih i kvadratnih izraza. Učenici bi trebali moći povezati različita područja s različitim dijelovima izraza koji se množe. To bi im trebalo pomoći da vide što znači 'množenje svega sa svime'.

DIJELJENJE CIJELIH BROJEVA

$(+6) : (+2) = 3$

$(-8) : (+2) = -4$

DIJELJENJE CIJELIH BROJEVA

Negativni djelitelj znači "uzmi suprotno od". (okrenuti)

$(+10) : (-2) = -5$

DIJELJENJE CIJELIH BROJEVA

Negativni djelitelj znači "uzmi suprotno od". (okrenuti)

$(-12) : (-3) = 4$

MNOŽENJE I DIJELJENJE CIJELIH BROJEVA

Za svaki od navedenih zadataka upotrijebite algebarske pločice za modeliranje.

a) $4 \cdot 2$

b) $3 \cdot (-3)$

c) $-3 \cdot 4$

d) $-5 \cdot (-2)$

e) $10 : 2$

f) $-12 : 3$

g) $16 : (-4)$

h) $-20 : (-5)$

ALGEBARSKI IZRAZI

Kako možemo modelirati algebarski izraz $5 + 4x$?

ALGEBARSKI IZRAZI

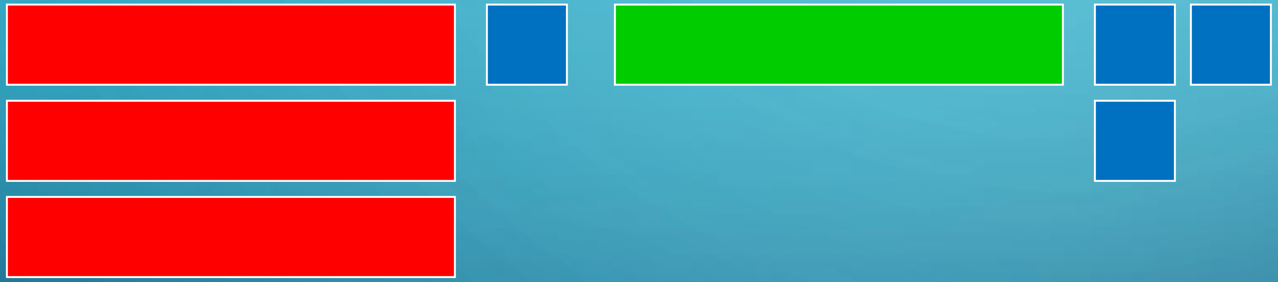
$2x + 3$

$4x - 2$

ALGEBARSKI IZRAZI

$2x + 4 + x + 2$

$-3x + 1 + x + 3$



ALGEBARSKI IZRAZI

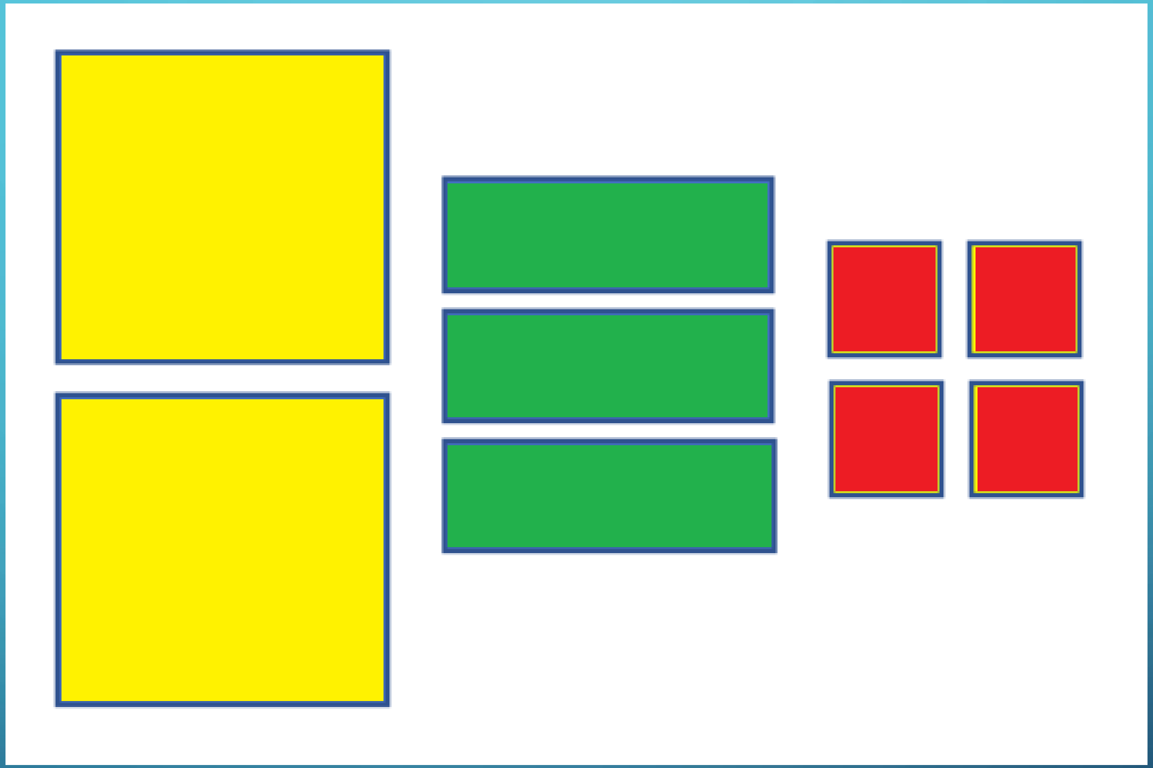
Kako možemo modelirati algebarski izraz $3x + 2 - 4x - 5$?

Napomena: Sjetite se da je oduzimanje isto kao dodavanje suprotnoga.

$$3x + 2 - 4x - 5 = 3x + 2 + (-4x) + (-5) = -x - 3$$

ALGEBARSKI IZRAZI

Kako možemo modelirati algebarski izraz $2x^2 + 3x - 4$?



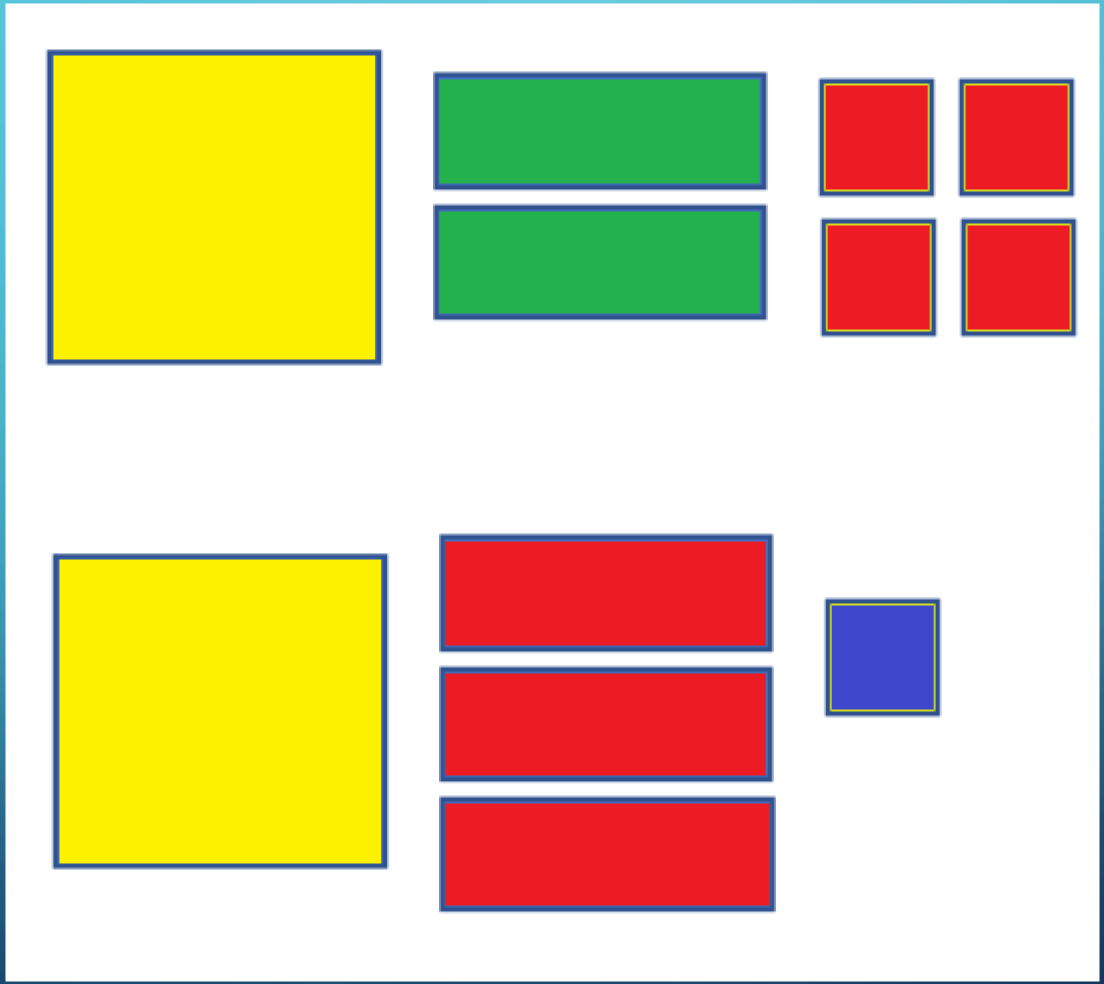
ALGEBARSKI IZRAZI

ZADATCI

- $4x + 8 - 3x$
- $5x - 9 - 2 - 3x$
- $-3x + 7 + x - 6$
- $3x + 1 - 2x + 4$
- $2x^2 + 5x - 3 - x^2 + 2x + 5$
- $2x^2 - 2x + 3 - 3x^2 + 3x - 2$

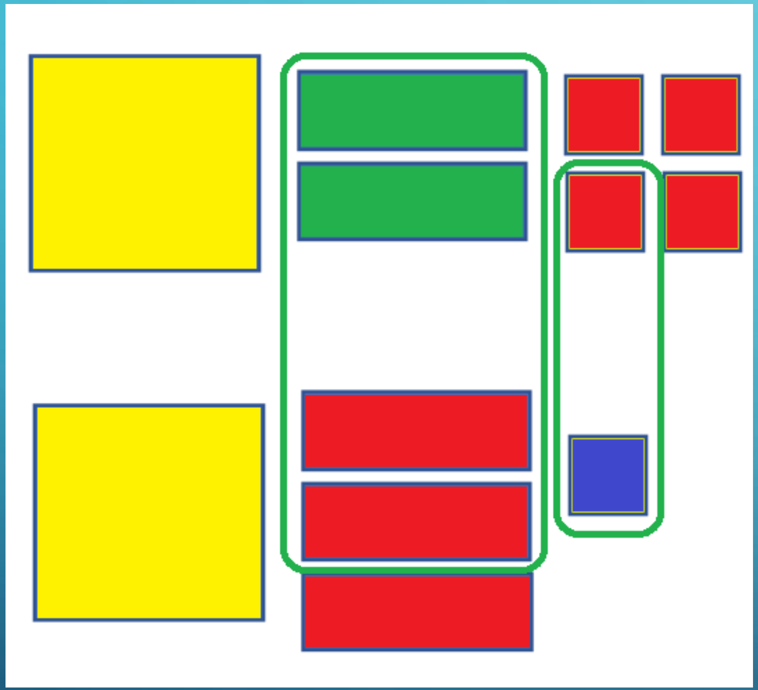
ZBRAJANJE I ODUZIMANJE BINOMA

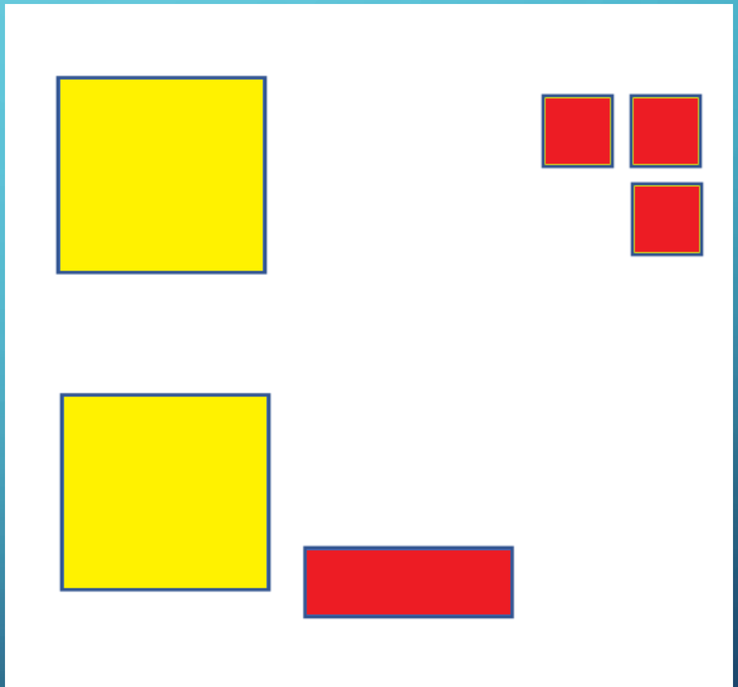
- Izračunajmo $(x^2 + 2x - 4) + (x^2 - 3x + 1)$?



ZBRAJANJE I ODUZIMANJE BINOMA

- Izračunajmo $(x^2 + 2x - 4) + (x^2 - 3x + 1)$?

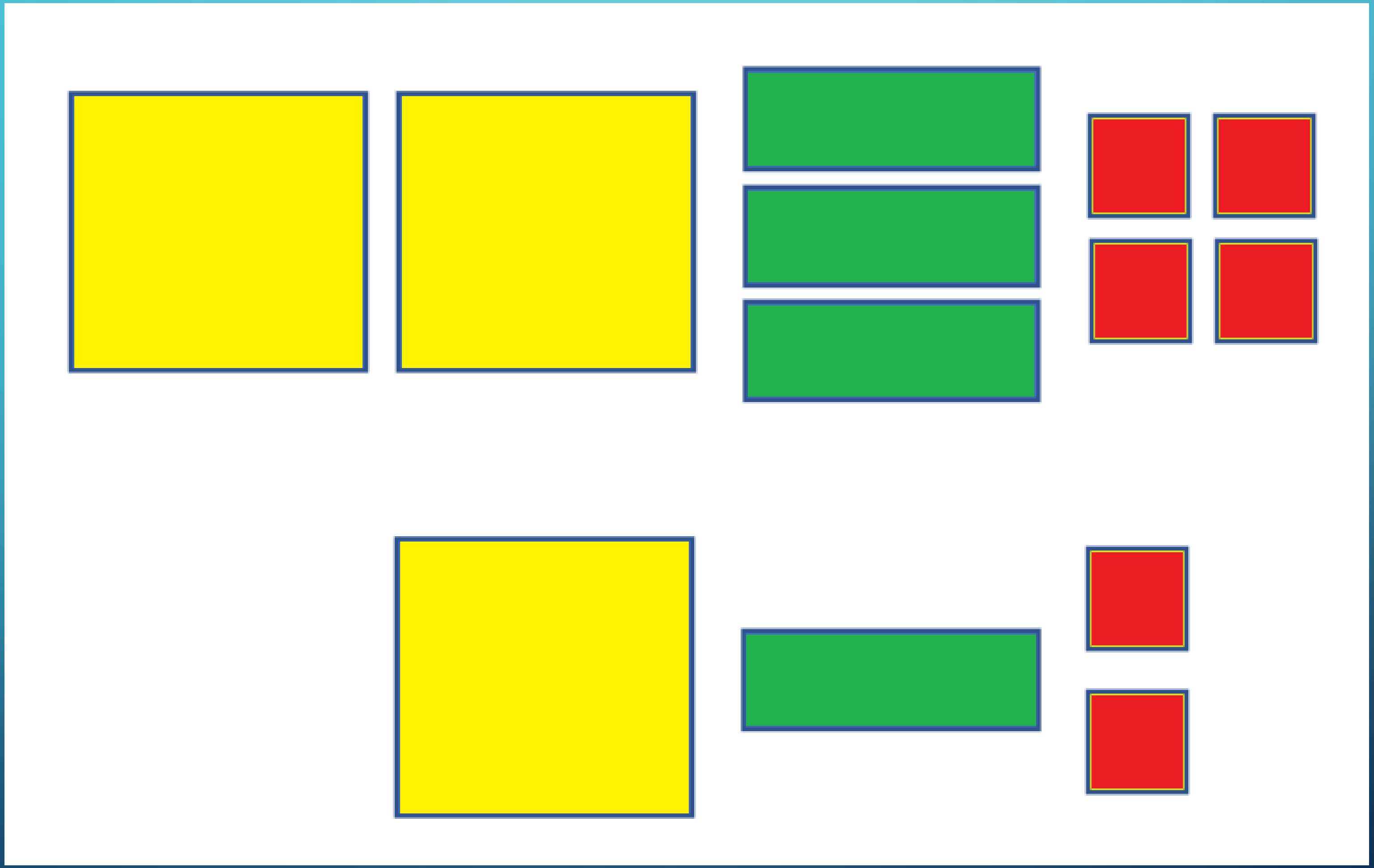




$2x^2 - x - 3$

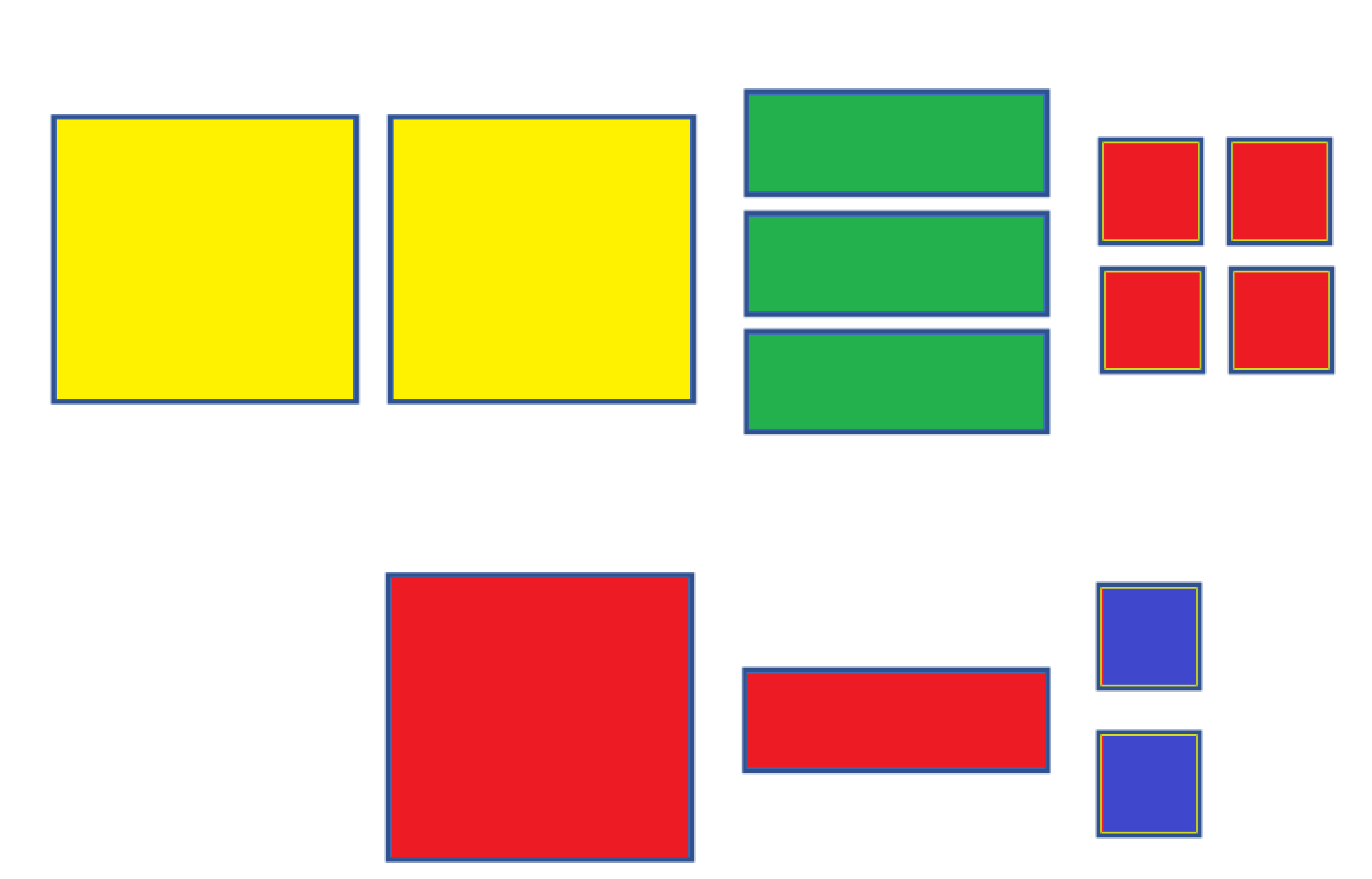
ZBRAJANJE I ODUZIMANJE BINOMA

- Izračunajmo $(2x^2 + 3x - 4) - (x^2 + x - 2)$?



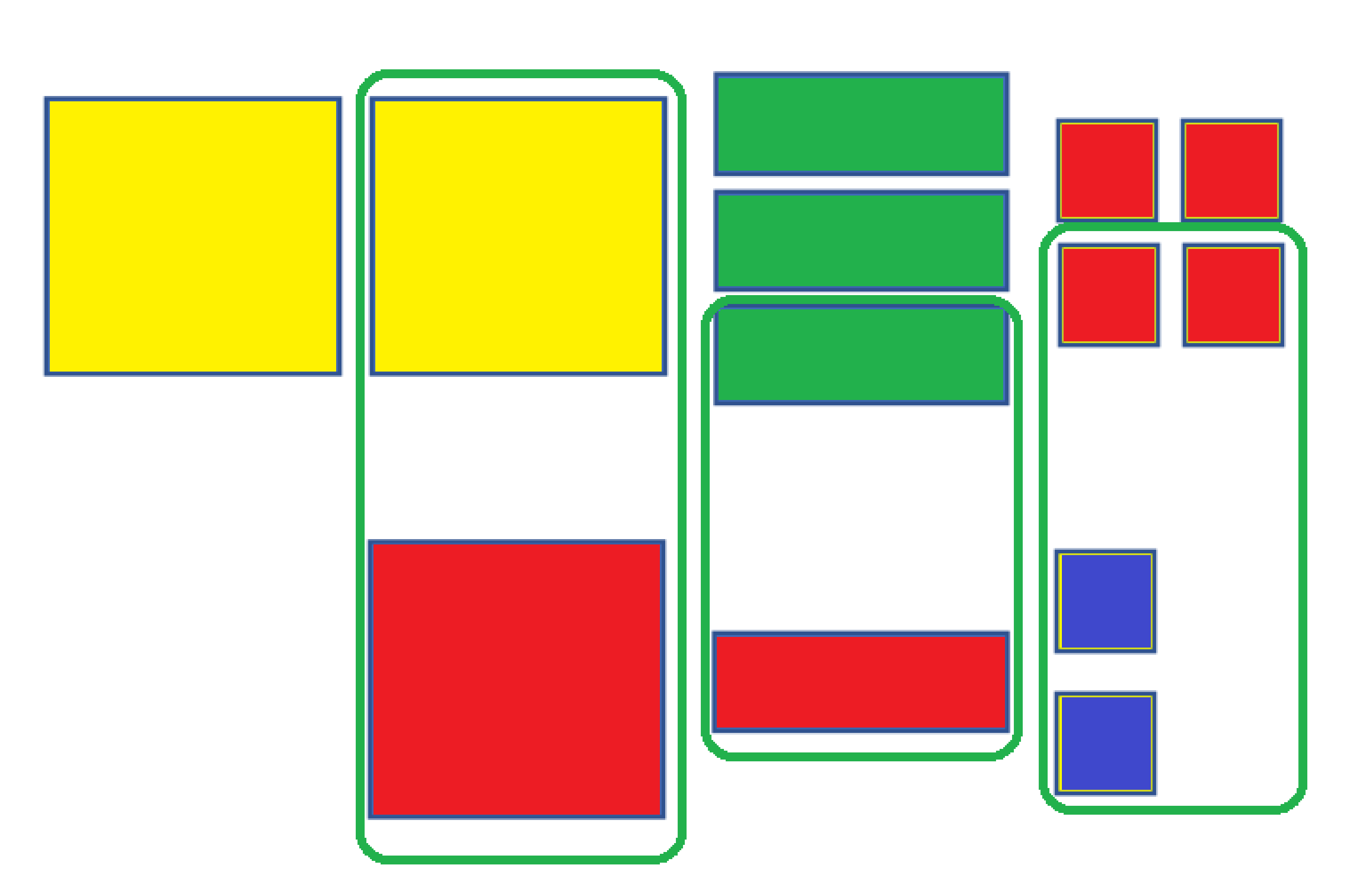
ZBRAJANJE I ODUZIMANJE BINOMA

- Izračunajmo $(2x^2 + 3x - 4) - (x^2 + x - 2)$?



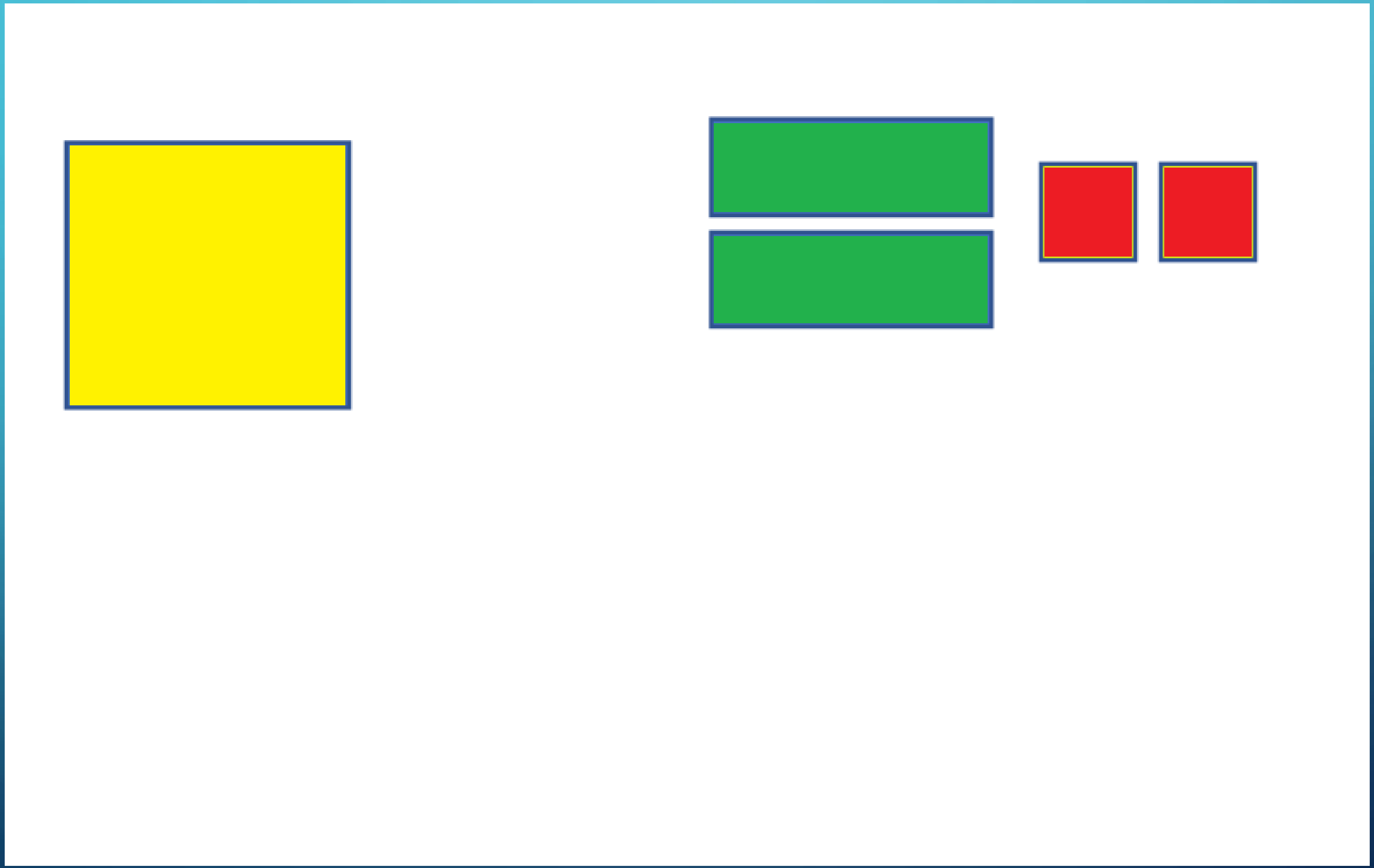
ZBRAJANJE I ODUZIMANJE BINOMA

- Izračunajmo $(2x^2 + 3x - 4) - (x^2 + x - 2)$?



ZBRAJANJE I ODUZIMANJE BINOMA

- Izračunajmo $(2x^2 + 3x - 4) - (x^2 + x - 2)$?



$x^2 + 2x - 2$

ZBRAJANJE I ODUZIMANJE BINOMA

Za svaki od navedenih zadataka upotrijebite algebarske pločice za modeliranje.

a) $(2x^2 + 5x - 3) + (-x^2 + 2x + 5)$

b) $(2x^2 - 2x + 3) - (3x^2 + 3x - 2)$

c) $(3x^2 - 2x + 4) + (-x^2 - x - 2)$

d) $5x^2 + 6 + (2x^2 - 2)$

e) $-3x^2 - 2x + 4 - (x^2 + x + 2)$

f) $-2x^2 - 2x + 1 - (3x^2 + x + 1)$

LINEARNE JEDNADŽBE S JEDNOM NEPOZNANICOM

Algebarske pločice možemo koristiti za rješavanje linearnih jednadžbi.

Ovo je dobar način ilustriranja metode balansiranja te dobar način da učenici razviju 'osjećaj' za 'raditi isto s obje strane jednadžbe' i zašto to radimo.

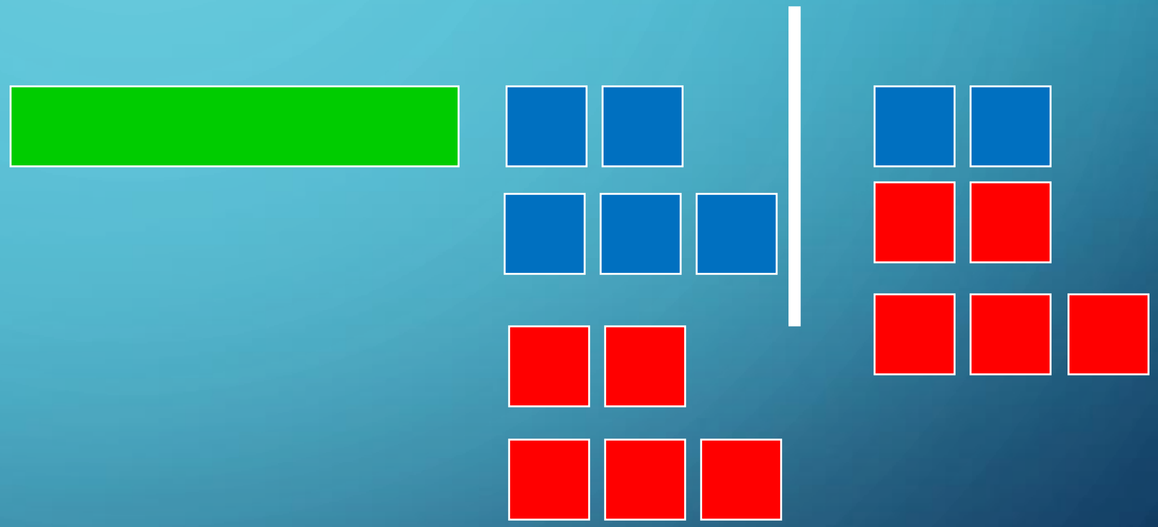
LINEARNE JEDNADŽBE S JEDNOM NEPOZNANICOM

Riješimo jednadžbu: $x + 5 = 2$.

1. Modeliranje problema

2. Dodavanje pločica i formiranje parova nula

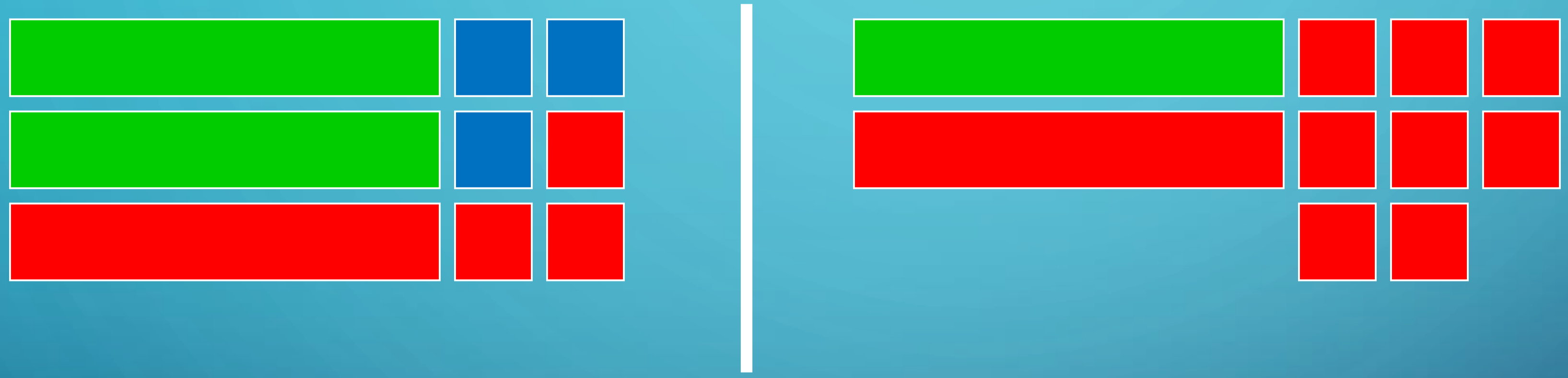
3. Micanje parova nula



$x = -3$

LINEARNE JEDNADŽBE S JEDNOM NEPOZNANICOM

Riješimo jednadžbu: $2x + 3 = x - 5$.

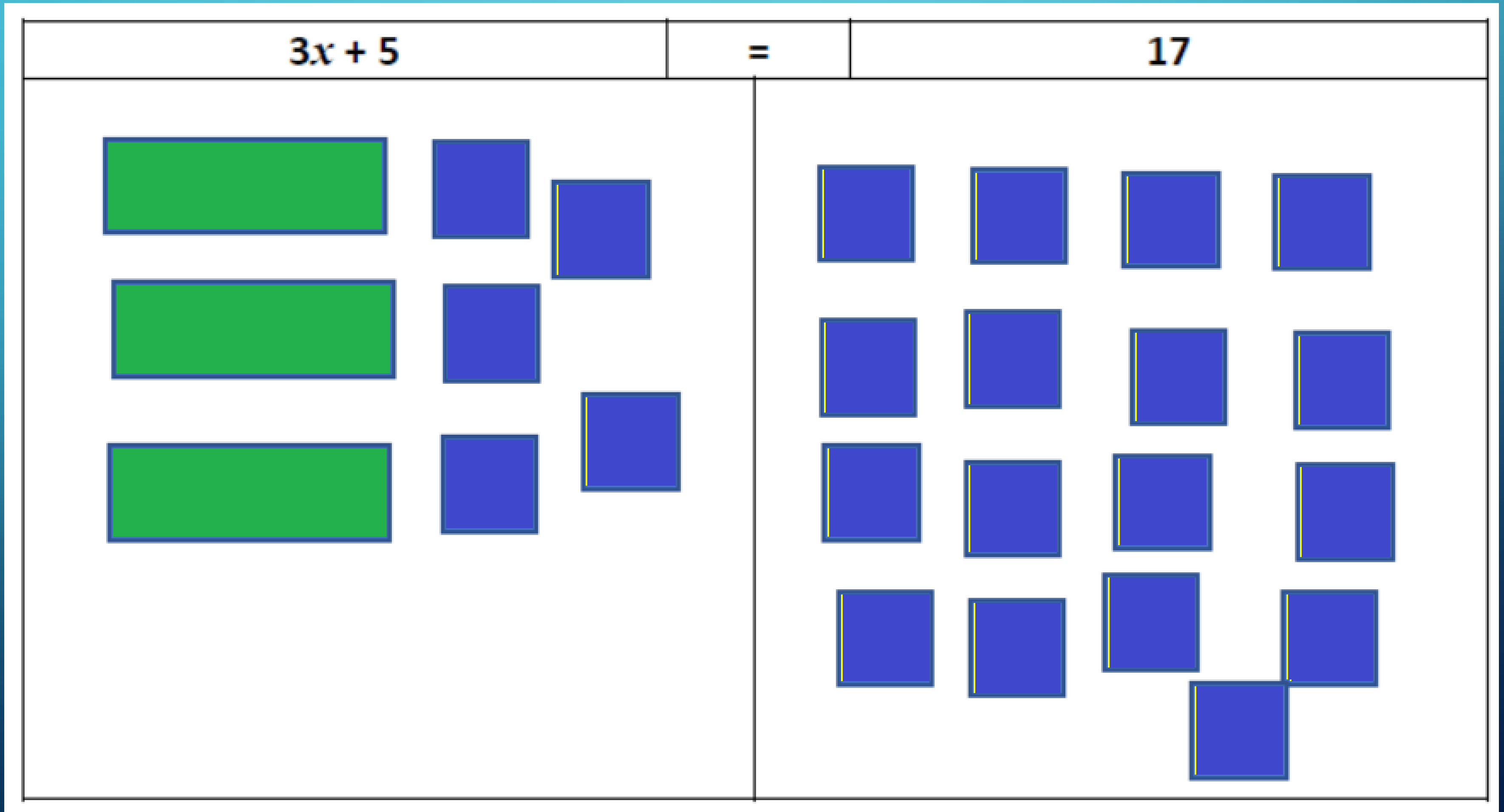


$x = -8$

LINEARNE JEDNADŽBE S JEDNOM NEPOZNANICOM

Riješimo jednadžbu: $3x + 5 = 17$.

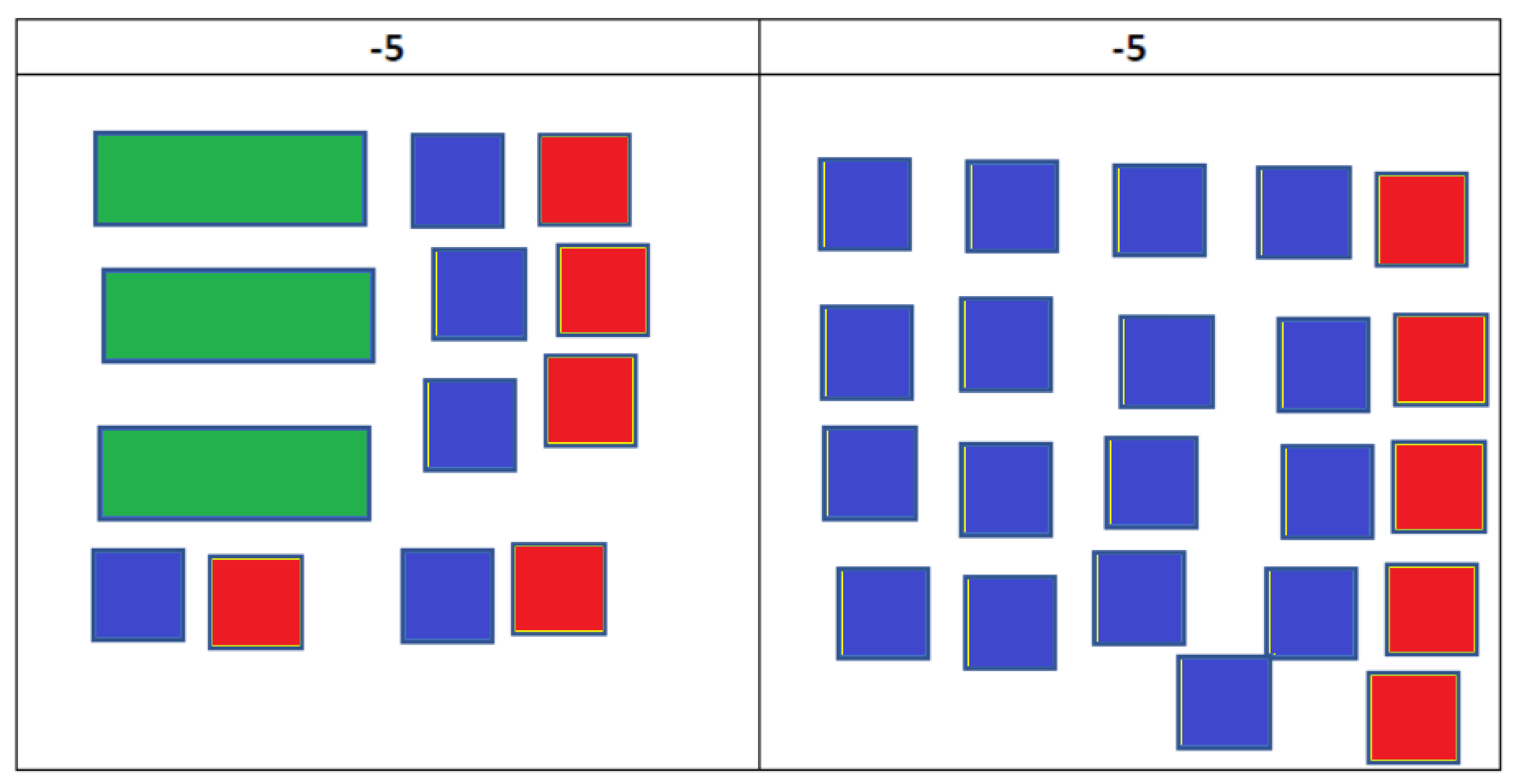
1. Modeliranje problema



LINEARNE JEDNADŽBE S JEDNOM NEPOZNANICOM

Riješimo jednadžbu: $3x + 5 = 17$.

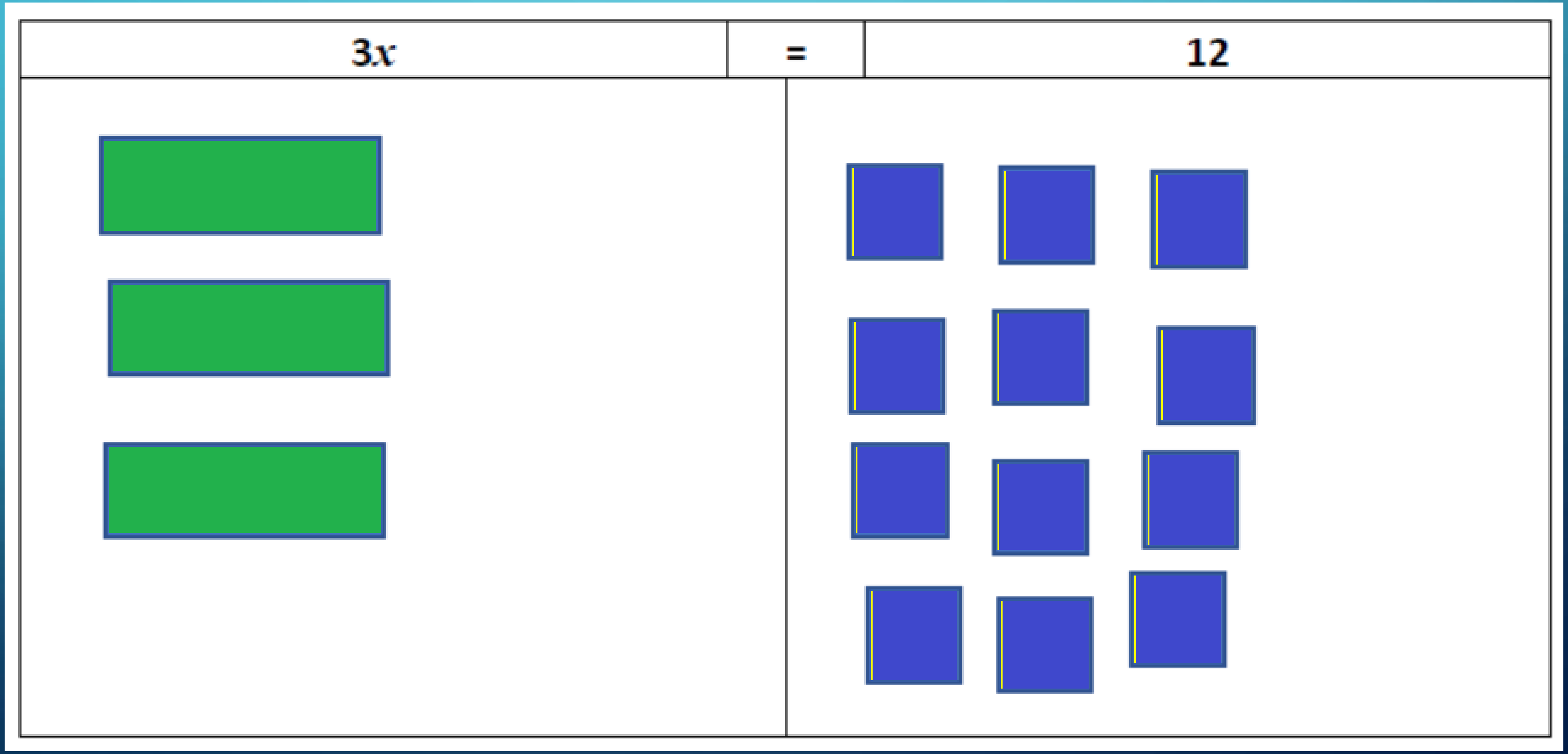
2. Dodavanje pločica i formiranje parova nula



LINEARNE JEDNADŽBE S JEDNOM NEPOZNANICOM

Riješimo jednadžbu: $3x + 5 = 17$.

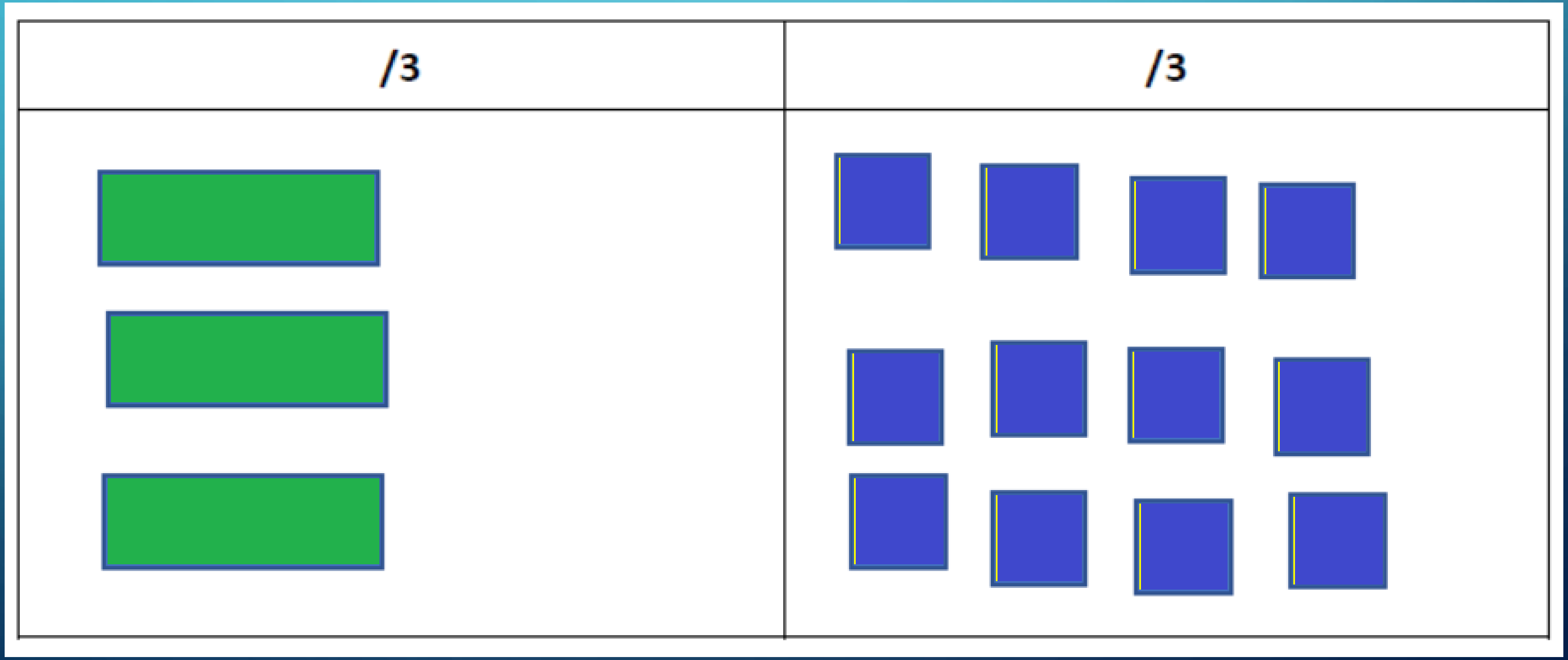
3. Micanje parova nula



LINEARNE JEDNADŽBE S JEDNOM NEPOZNANICOM

Riješimo jednadžbu: $3x + 5 = 17$.

4. Grupiranje jediničnih pločica ovisno o broju *x* - pločica



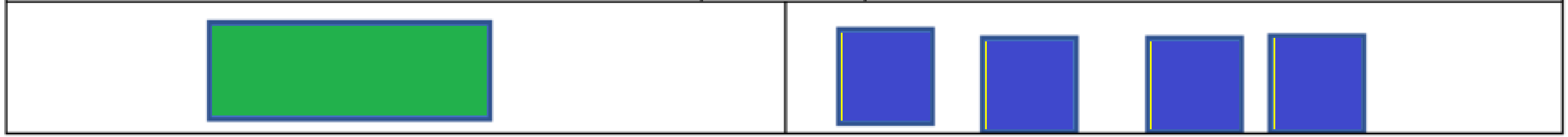
LINEARNE JEDNADŽBE S JEDNOM NEPOZNANICOM

Riješimo jednadžbu: $3x + 5 = 17$.

5. Uočavanje vrijednosti broja x.

Svaka x-pločica je ekvivalentna četirima jediničnim pločicama.

x	=	4



Vizualna demonstracija tj. korištenje konkretnih materijala poput algebarskih pločica može pomoći učenicima razviti bolje razumijevanje formalnog algoritma.

LINEARNE JEDNADŽBE S JEDNOM NEPOZNANICOM

ZADATCI

a) $3x - 2 = 7$

b) $2x + 3 = 3x - 1$

c) $3 - x = 9 + 2x$

d) $x + 2 = 3$

e) $2x - 4 = 8$

f) $2x + 3 = x - 5$

MNOŽENJE BINOMA

Prva faza u množenju algebarskih izraza je njihovo množenje cijelim brojem.

Kako biste to učinili pomoću algebarskih pločica, za slaganje modela upotrijebite predložak za množenje, a zatim ispunite pravokutnik.

Dobro je učenicima sugerirati da rasporede pločice tako da prvo budu x-pločice, a zatim jedinične pločice.

MNOŽENJE BINOMA

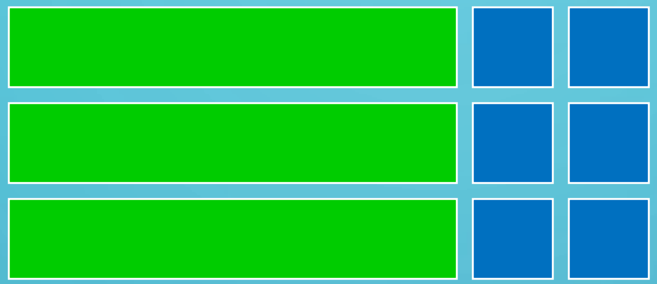
Prva faza u množenju algebarskih izraza je njihovo množenje cijelim brojem.

Kako biste to učinili pomoću algebarskih pločica, za slaganje modela upotrijebite predložak za množenje, a zatim ispunite pravokutnik.

Dobro je učenicima sugerirati da rasporede pločice tako da prvo budu x-pločice, a zatim jedinične pločice.

MNOŽENJE BINOMA

Izračunajmo: $3 \cdot (x + 2)$

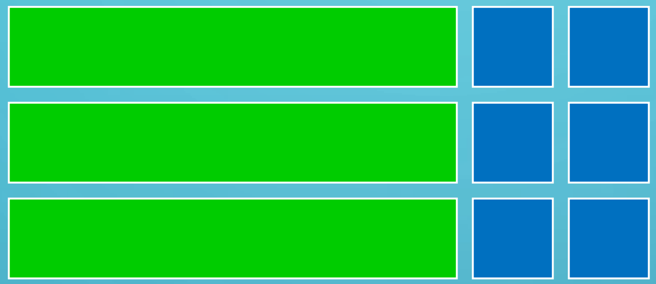


$$3 \cdot (x + 2) = 3x + 6$$

MNOŽENJE BINOMA

Okretanjem pločica problem jednostavno promijenite u množenje brojem -3.

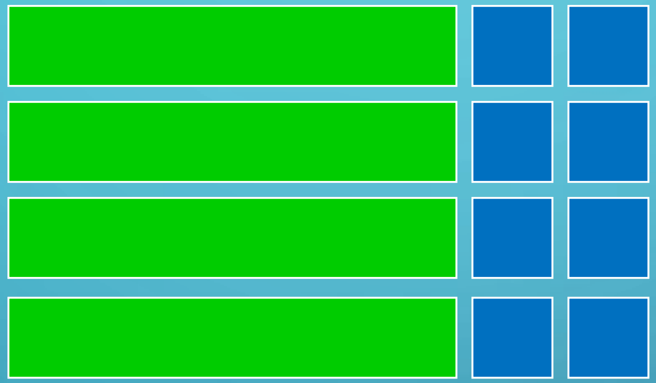
Izračunajmo: $-3 \cdot (x + 2)$



$-3 \cdot (x + 2) = -3x - 6$

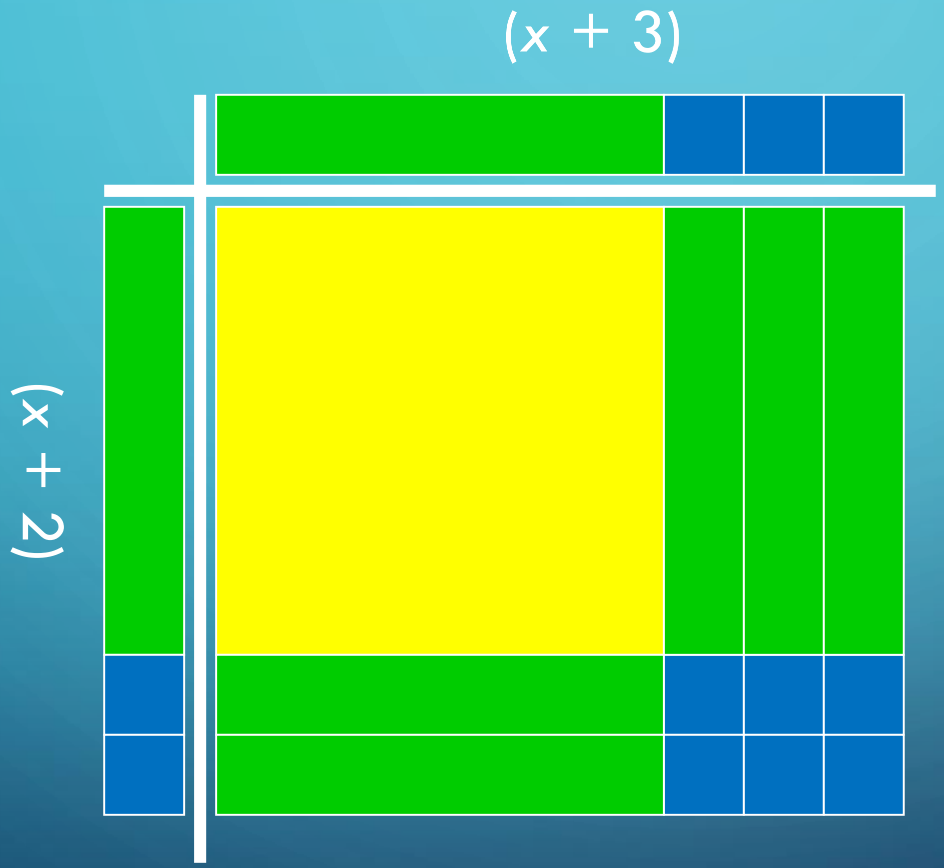
MNOŽENJE BINOMA

Ili pokažite umnožak i pitajte koji bi mogli biti faktor?



MNOŽENJE BINOMA

Izračunajmo: $(x + 2) \cdot (x + 3)$



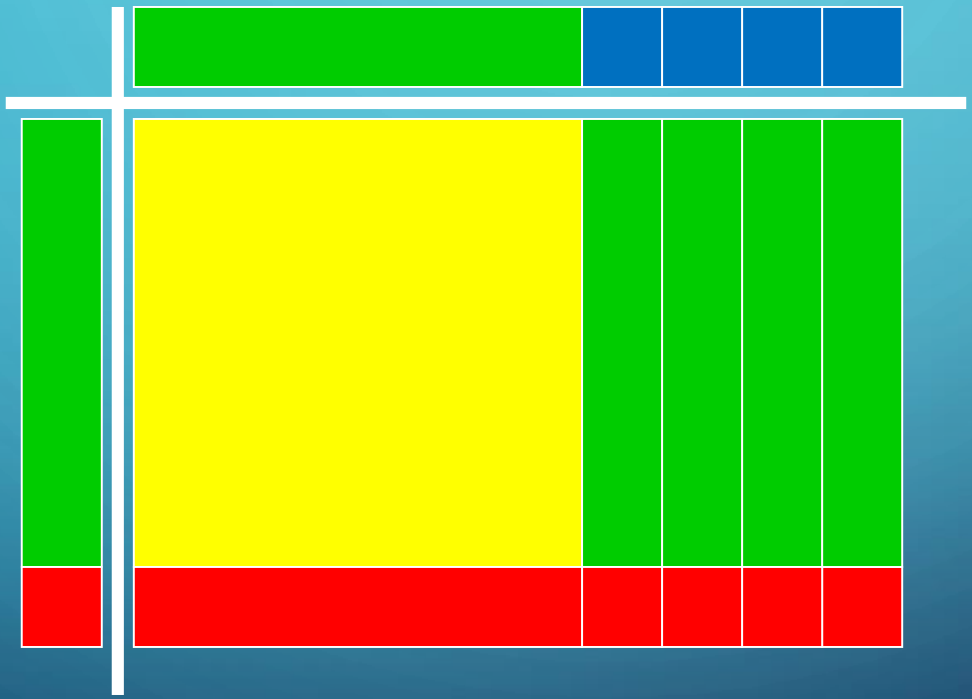
$$(x + 2) \cdot (x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

MNOŽENJE BINOMA

Izračunajmo: $(x - 1) \cdot (x + 3)$

$(x + 3)$

$(x - 1)$



$$(x - 1) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x - 4$$

MNOŽENJE BINOMA

ZADATCI

a) $3(x - 4)$

b) $-2(x + 2)$

c) $-3(x - 2)$

d) $(2x - 1) \cdot (x + 2)$

e) $(x + 2)(x - 3)$

f) $(x - 2)(x - 3)$

g) $x(x + 1)$

h) $(x + 2)(x + 1)$

i) $(2x + 2)(x + 1)$

FAKTORIZACIJA

Nakon što se učenici upoznaju i ovladaju množenjem algebarskih izraza, možete prijeći na faktorizaciju.

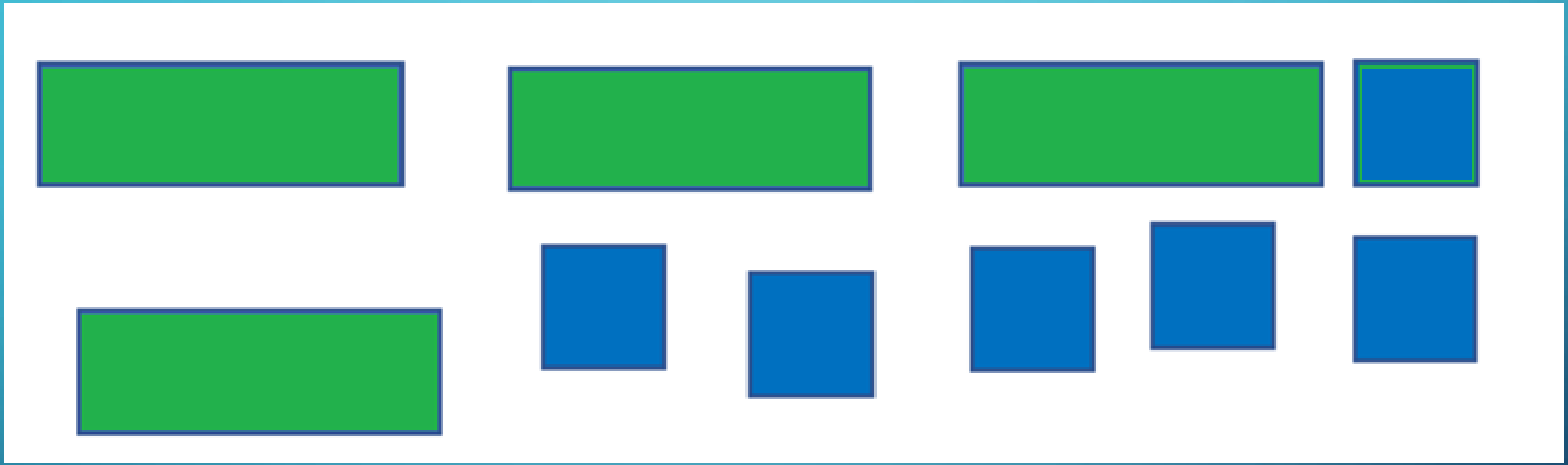
Započnite faktoriziranjem samo na cjelobrojni faktor.

Koristite isti predložak kao za množenje.

Učenici moraju posložiti pločice u pravokutnik i zatim identificirati faktore.

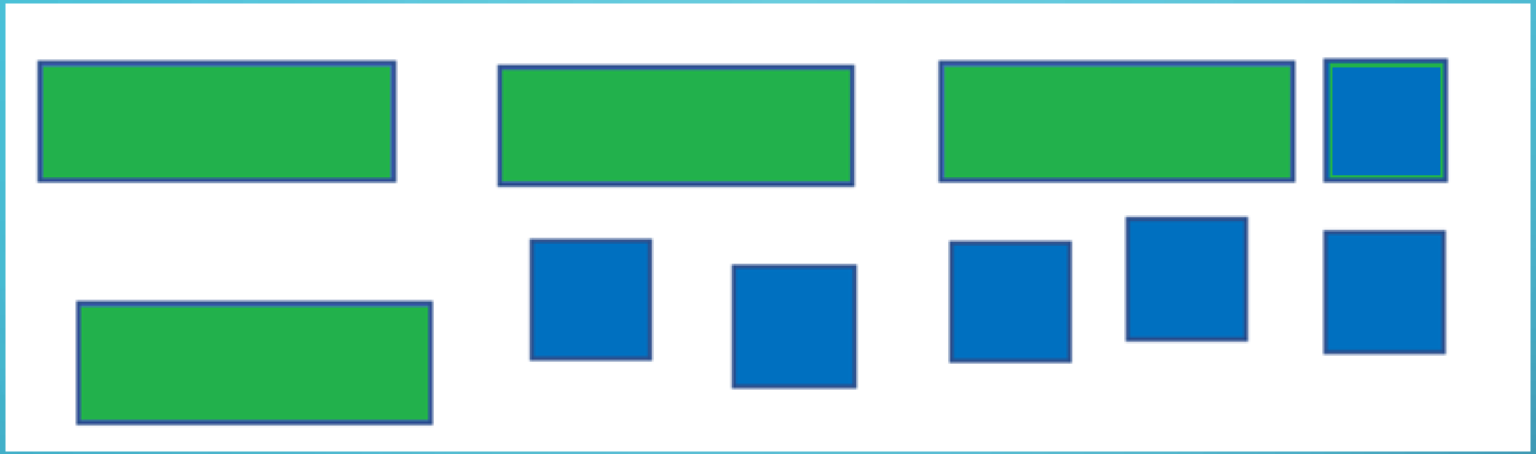
FAKTORIZACIJA

Npr.



FAKTORIZACIJA

Npr.



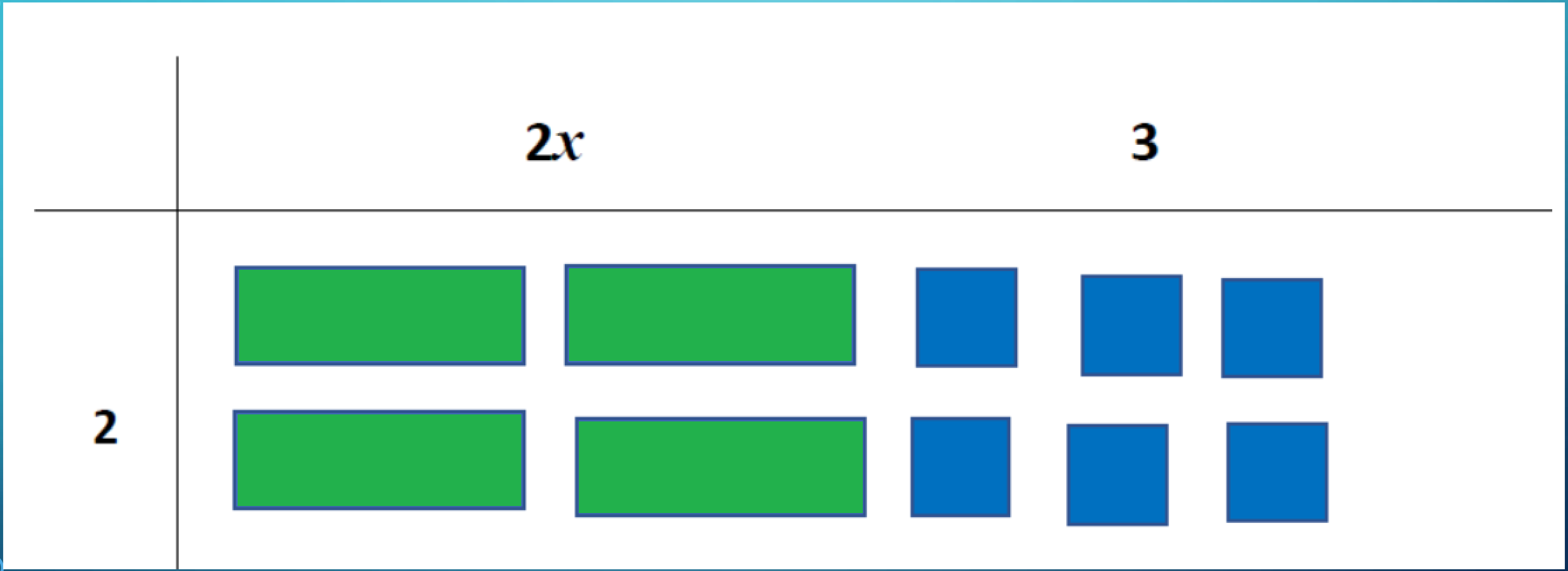
Ovdje imamo 4 x-pločice i 6 jedinica-pločica.

Važno je da učenici identificiraju pločice koje imaju prije nego počnu rastav na faktore.

Imamo paran broj obiju vrsta pločica pa je 2 dobar početak.

FAKTORIZACIJA

Pločice se zatim mogu rasporediti na sljedeći način:



$$4x + 6 = 2(2x + 3)$$

FAKTORIZACIJA

Dajte učenicima priliku eksperimentirati s različitim slaganjima.

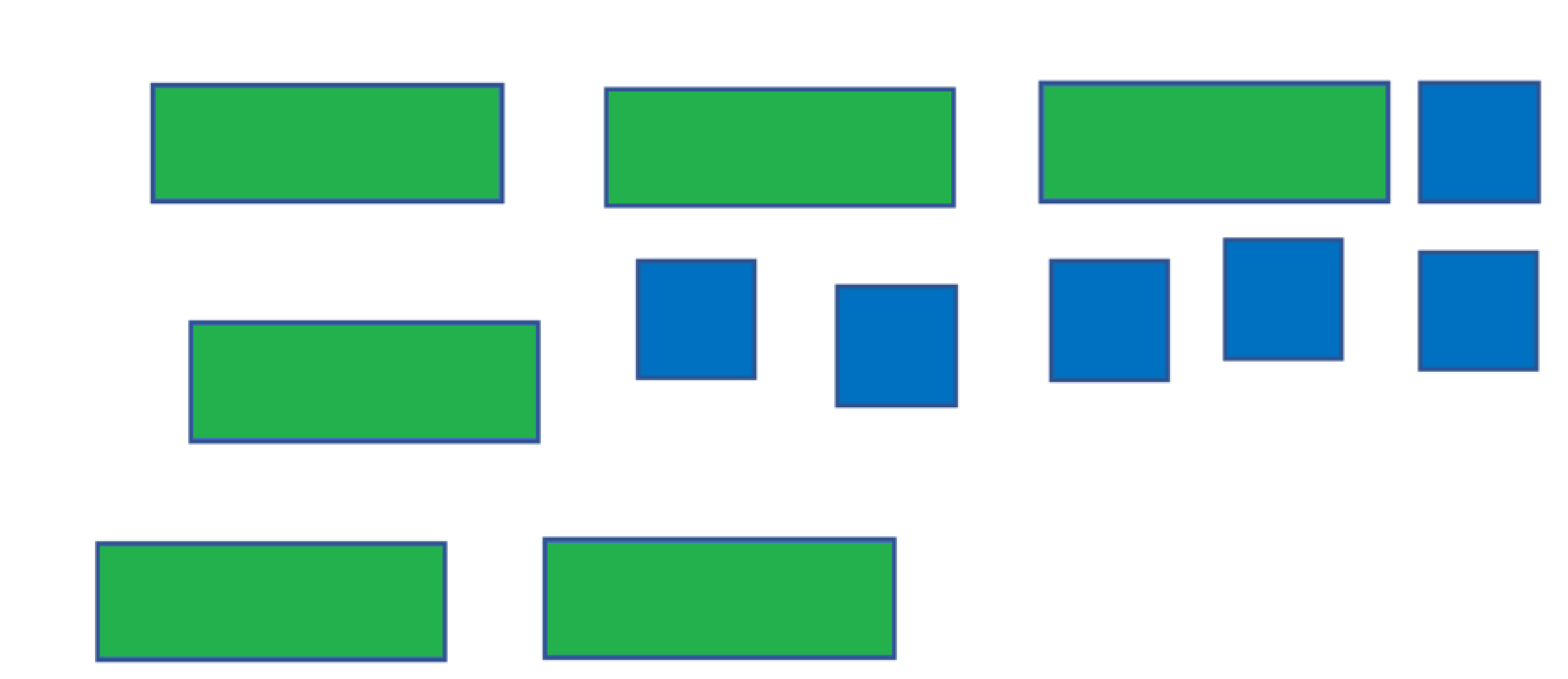
Neki će odmah pronaći ispravnu faktorizaciju, dok će se drugi mučiti.

Ova vježba zahtijeva određenu prostornu svijest.

FAKTORIZACIJA

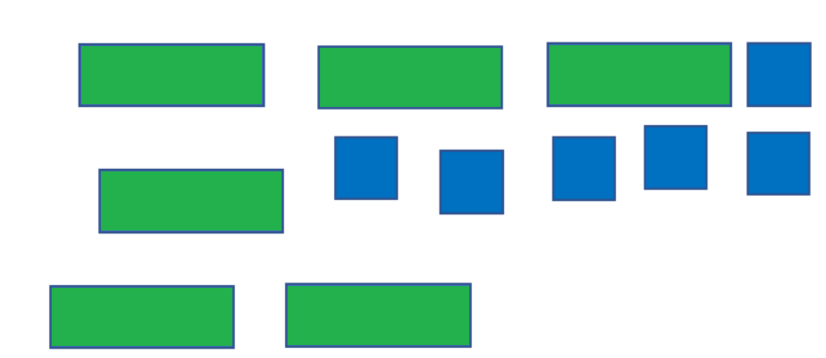
Često može postojati više od jednog načina slaganja pločica.

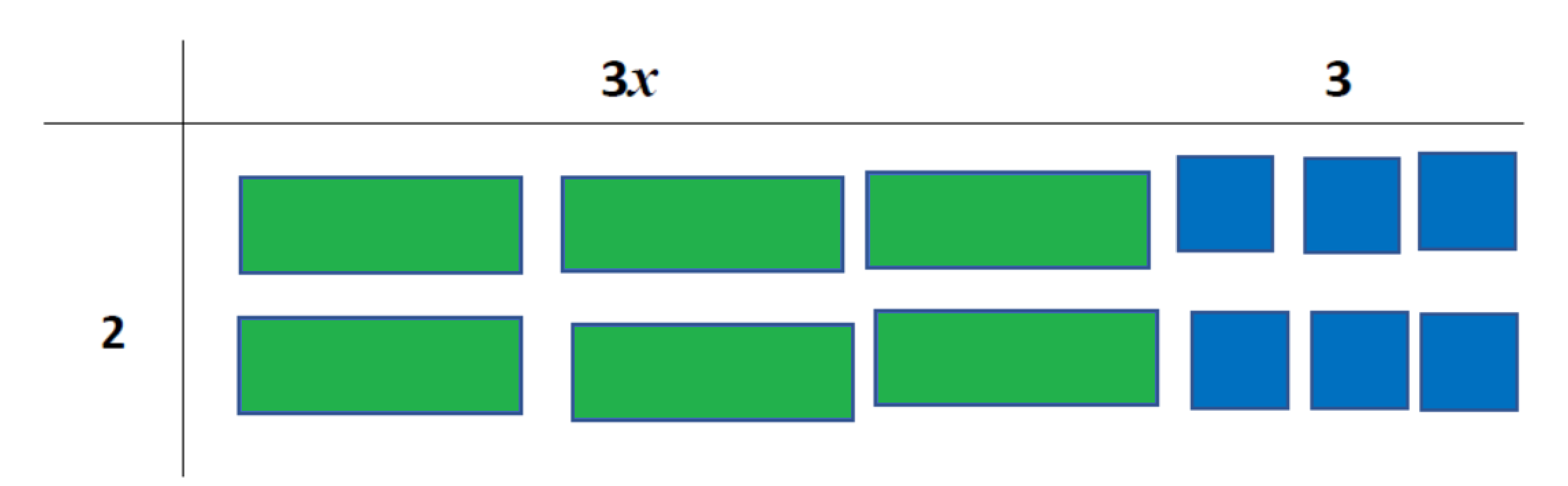
Npr.



FAKTORIZACIJA

1. način

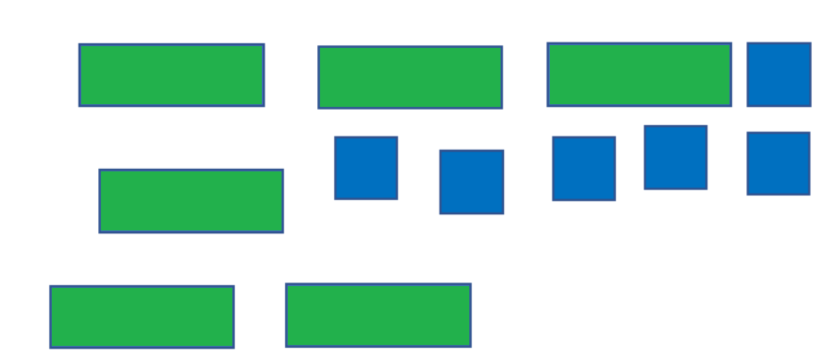


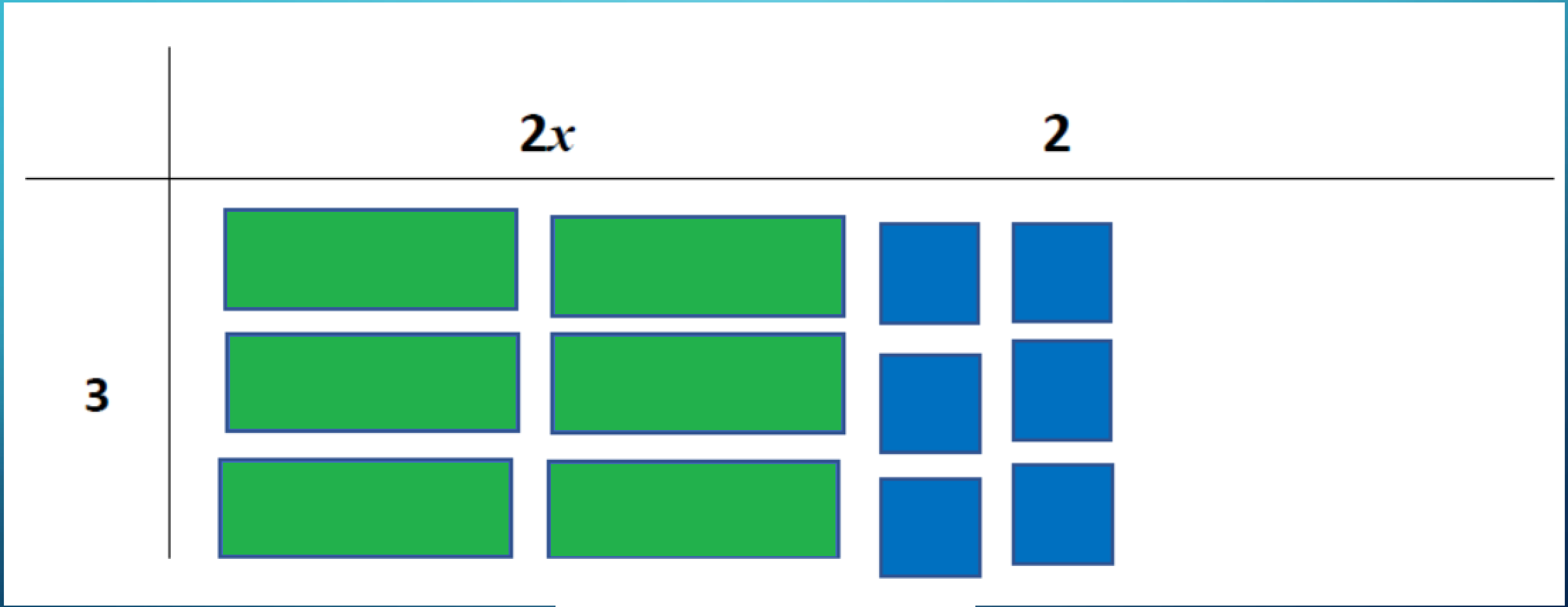


$$6x + 6 = 2(3x + 3)$$

FAKTORIZACIJA

2. način

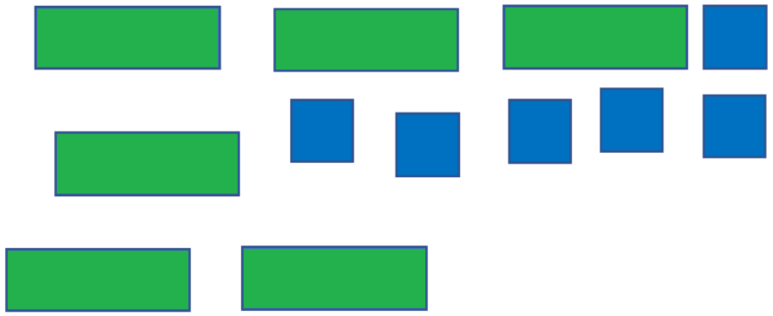


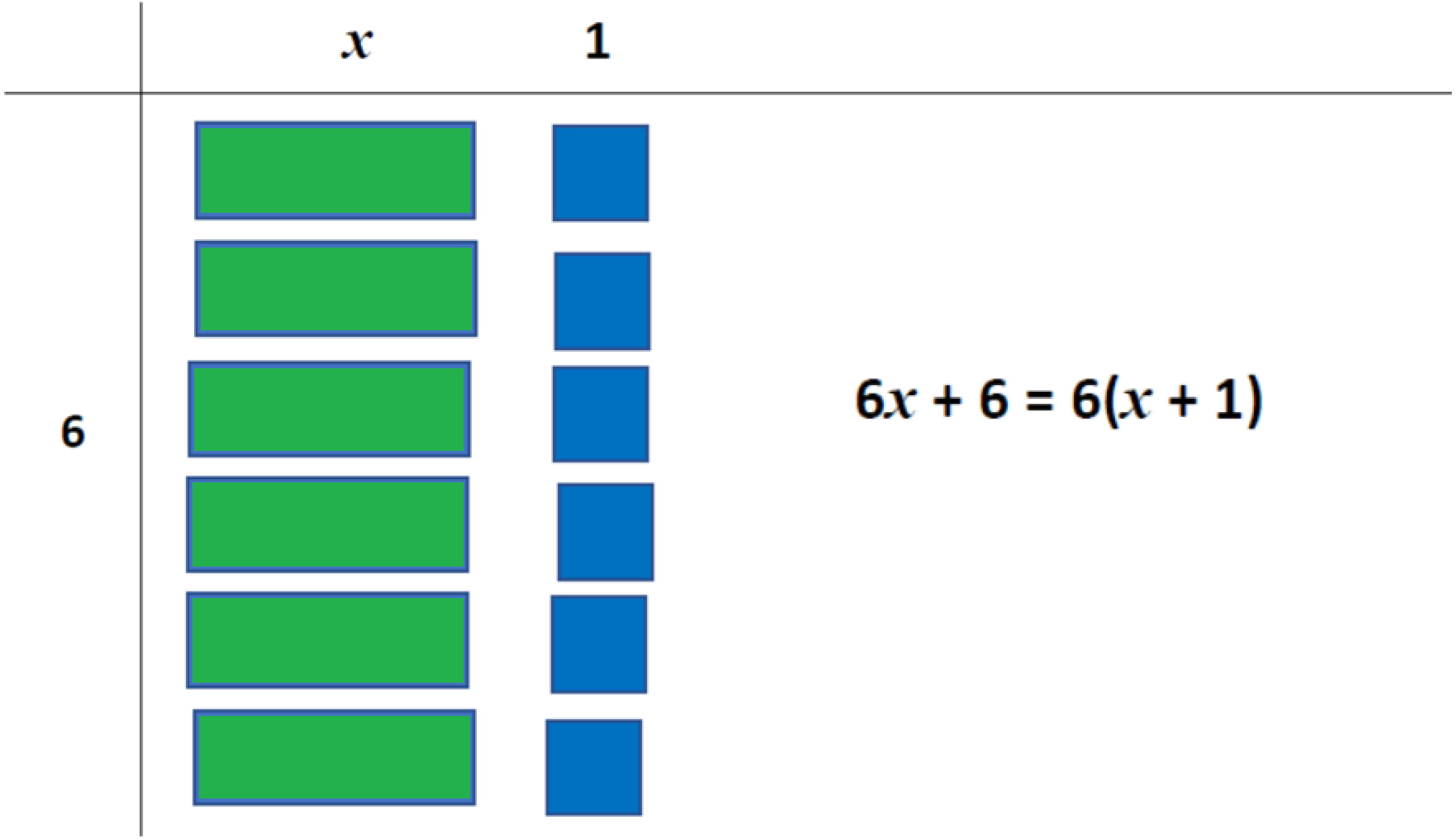


$$6x + 6 = 3(2x + 2)$$

FAKTORIZACIJA

3. način





$$6x + 6 = 6(x + 1)$$

FAKTORIZACIJA

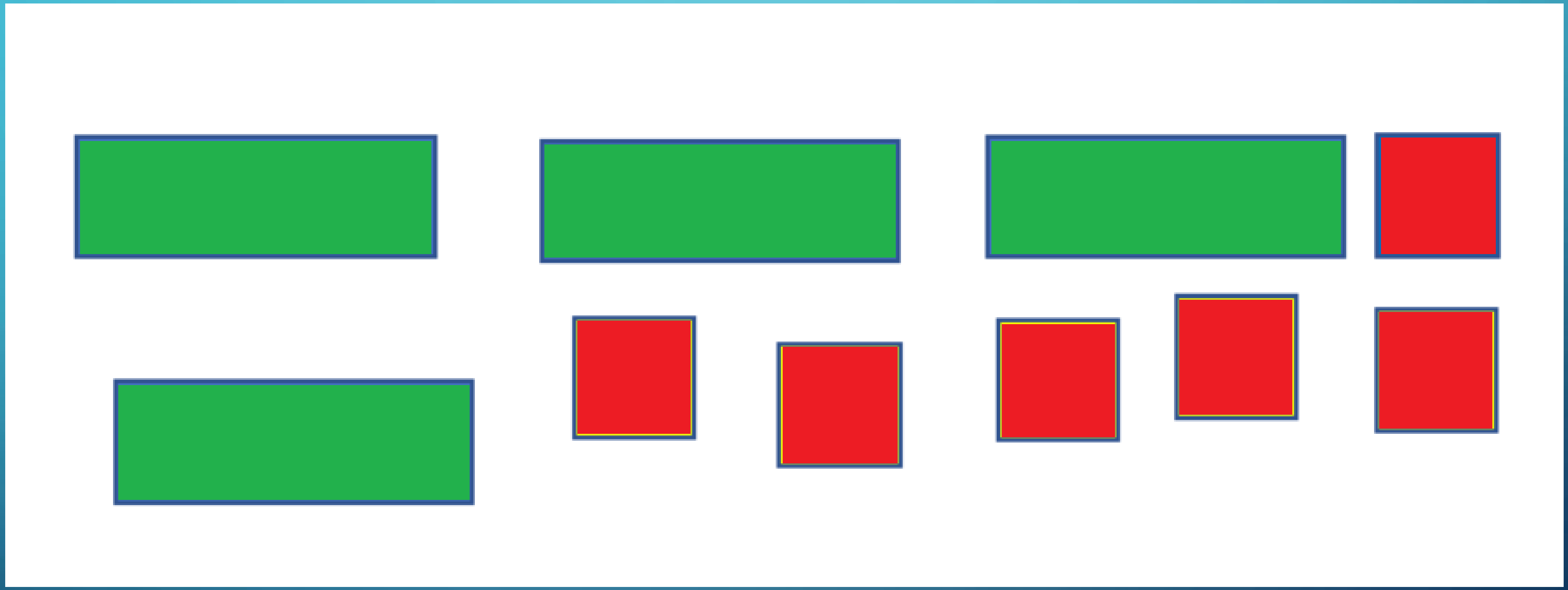
Prikazivanje različitih slaganja trebalo bi dovesti do rasprave o tome što se podrazumijeva pod "potpuno" faktoriziranim.

Koji je od ovih slaganja "bolji" i zašto?

FAKTORIZACIJA

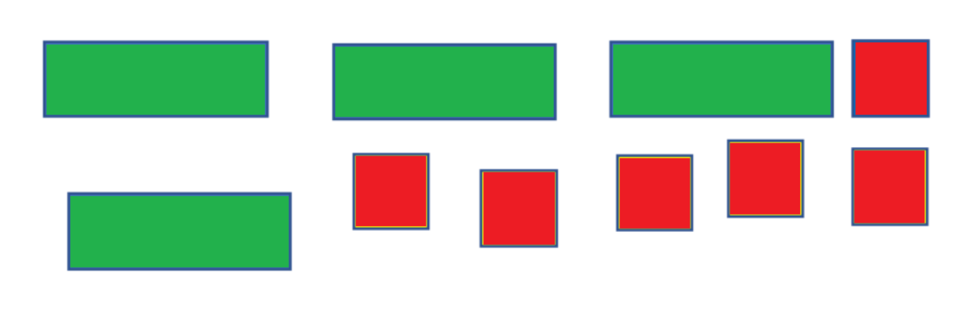
Zatim možete prijeći na izraze s negativnim brojevima i/ili negativnim faktorima.

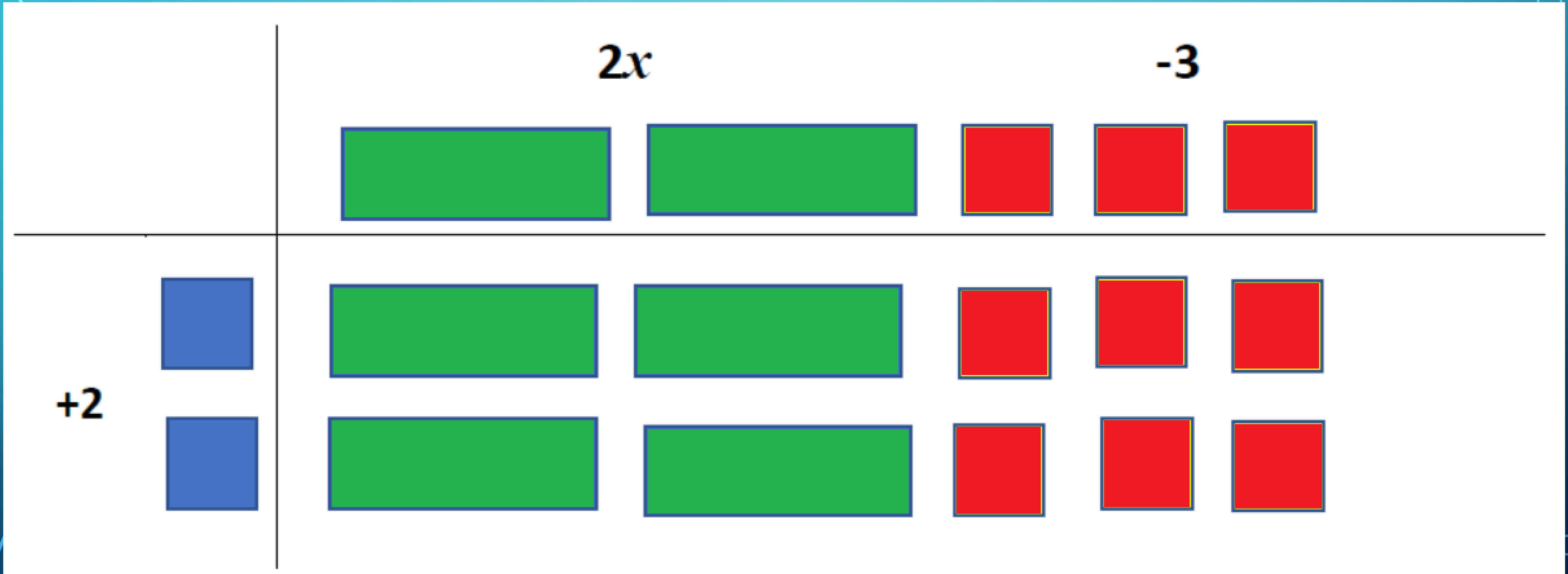
Npr.



FAKTORIZACIJA

1. način

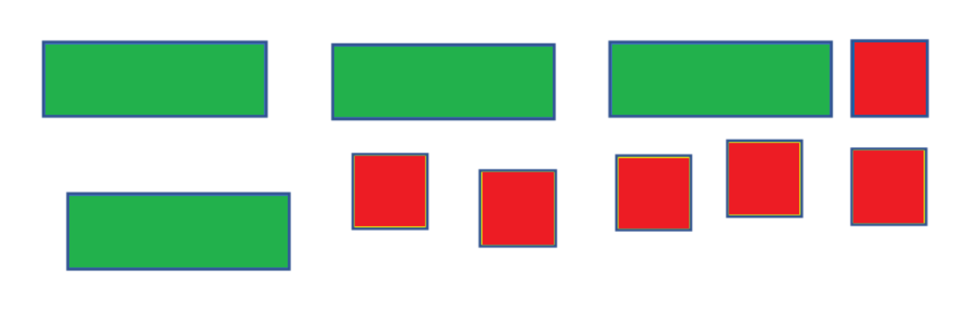


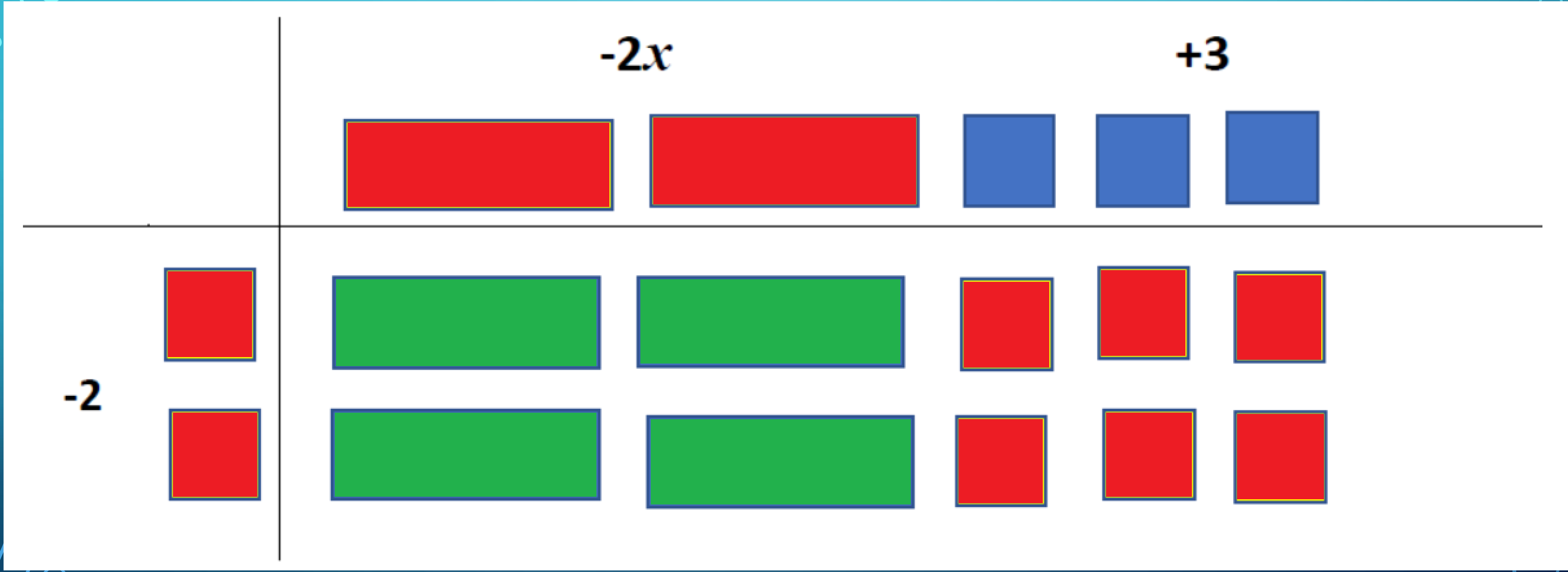


$$4x - 6 = 2(2x - 3)$$

FAKTORIZACIJA

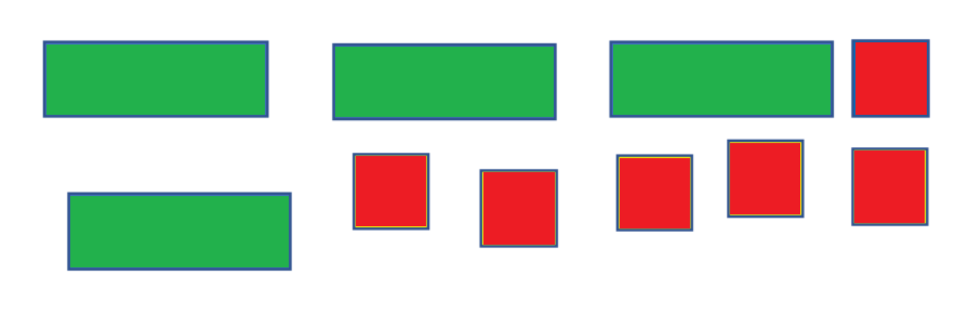
2. način



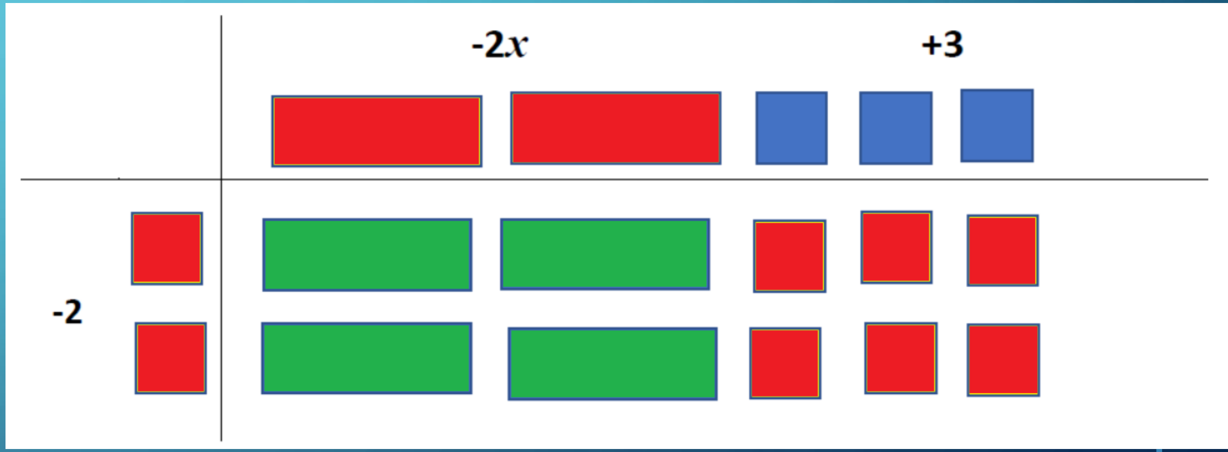


$$4x - 6 = -2(-2x + 3)$$

FAKTORIZACIJA



Važno je da učenici vide da su ti aranžmani ekvivalentni i da oba mogu biti korisna.



$4x - 6 = 2(2x - 3)$

$4x - 6 = -2(-2x + 3)$

FAKTORIZACIJA

Jednom kada učenici steknu sigurnost u faktoriziranju na cjelobrojni faktor, možete prijeći na faktoriziranje kvadratnih izraza.

Počnite s izrazima gdje je koeficijent uz x^2 jedan.

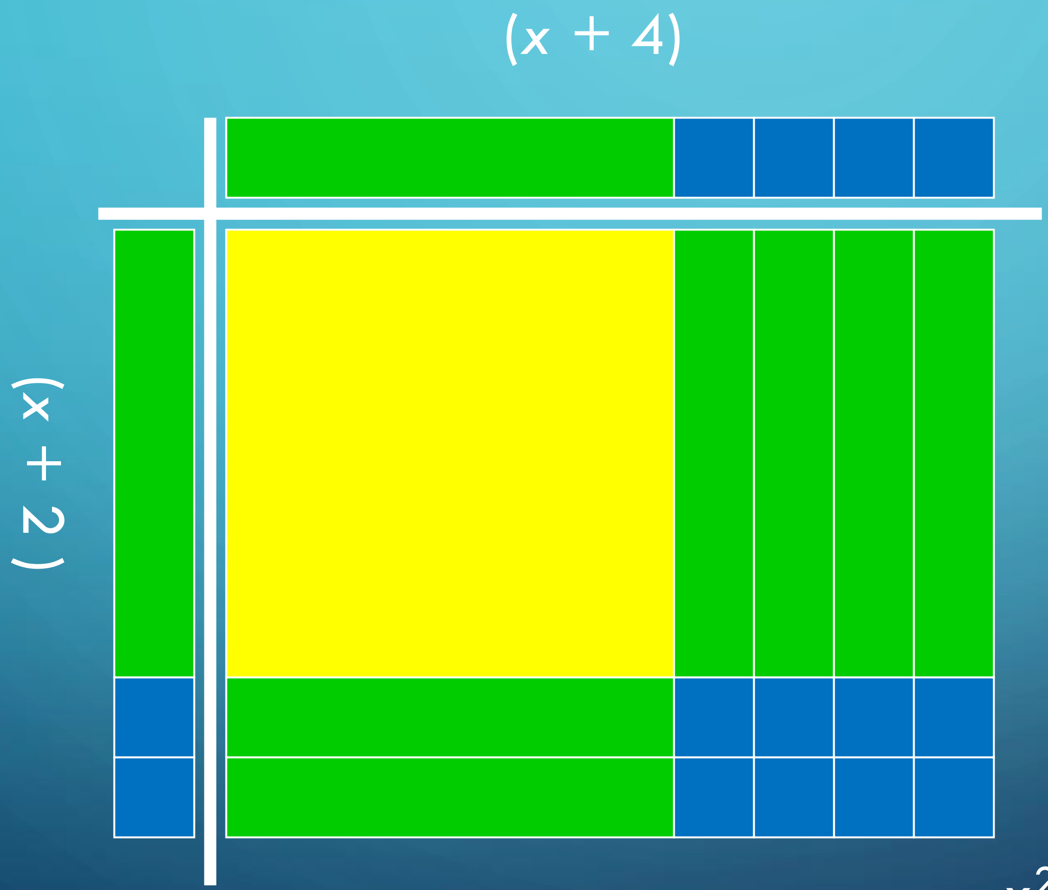
Učenici bi sada trebali biti upoznati s konceptom slaganja pločica u pravokutnik.

Pronalaženje ispravnog rasporeda bit će izazov za neke učenike.

Treba ih poticati da pomiču pločice dok ne pronađu pravokutnik.

FAKTORIZACIJA

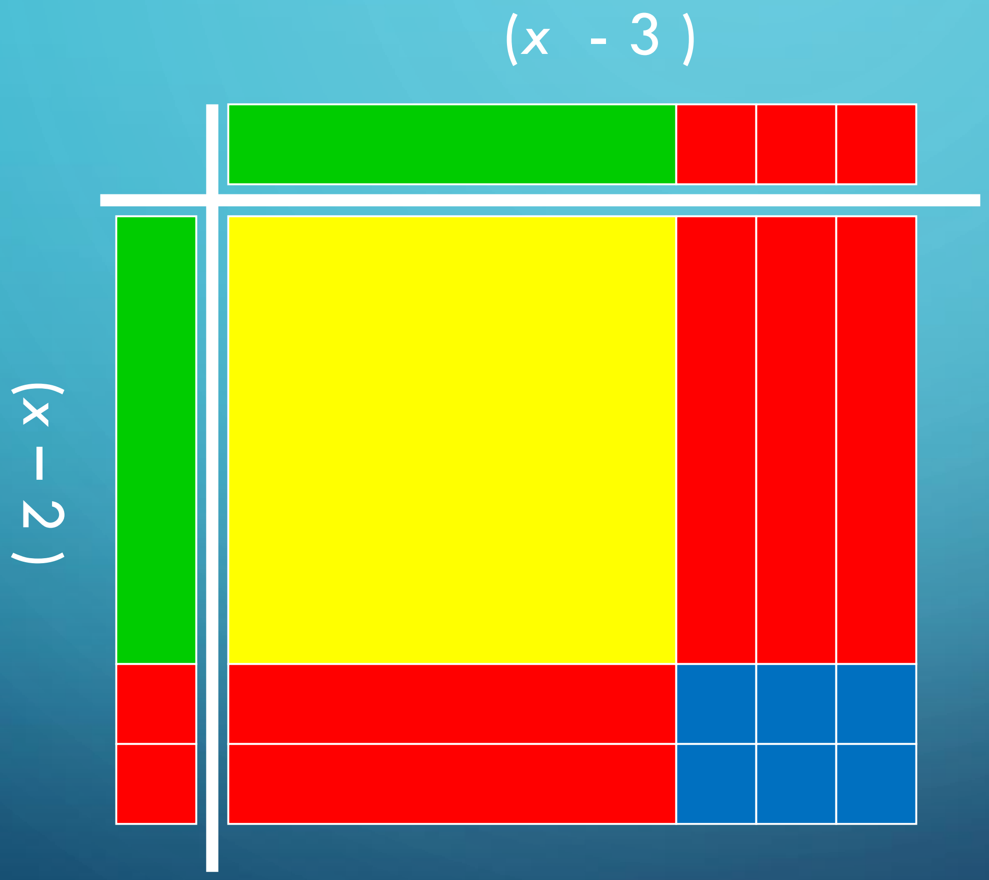
Npr. $x^2 + 6x + 8$



$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2) \cdot (x + 4)$$

FAKTORIZACIJA

Npr. $x^2 - 5x + 6$



$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$$

FAKTORIZACIJA

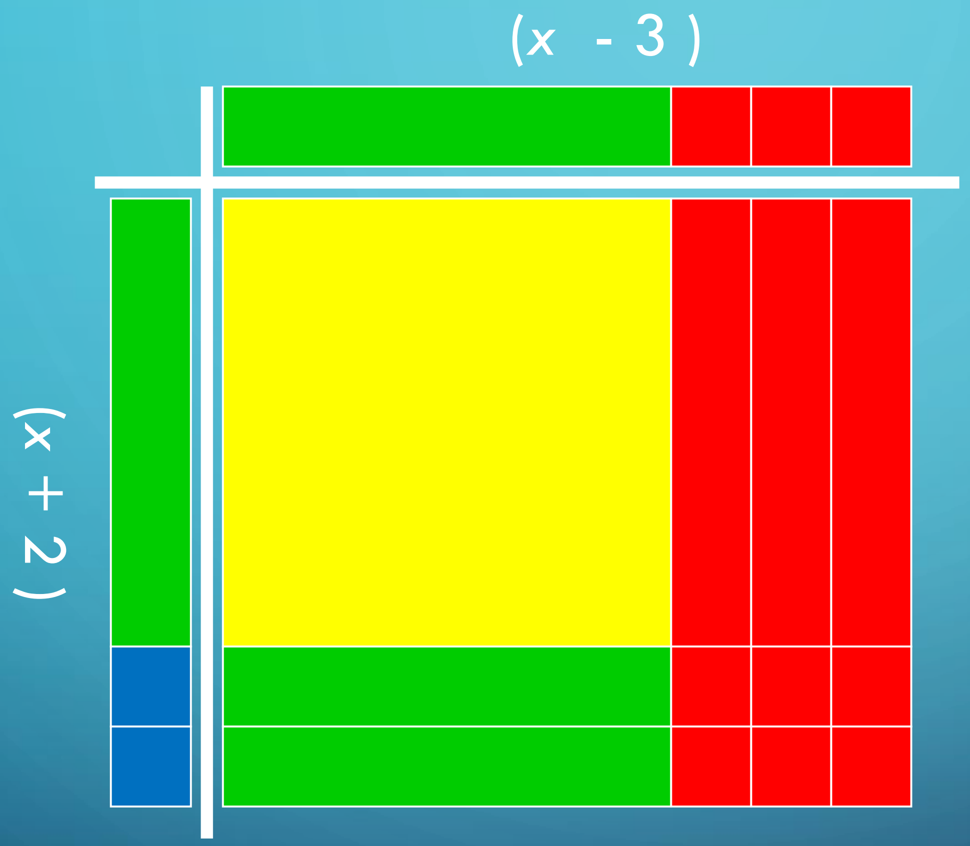
Kada uvedite negativne pločice, možda ćete za formiranje pravokutnika morati dodati parove s nultim zbrojem.

Npr. $x^2 - x - 6$

Pokažite kako možete dodati parove s nultim zbrojem, a da ne promijenite "stvarni" broj.

FAKTORIZACIJA

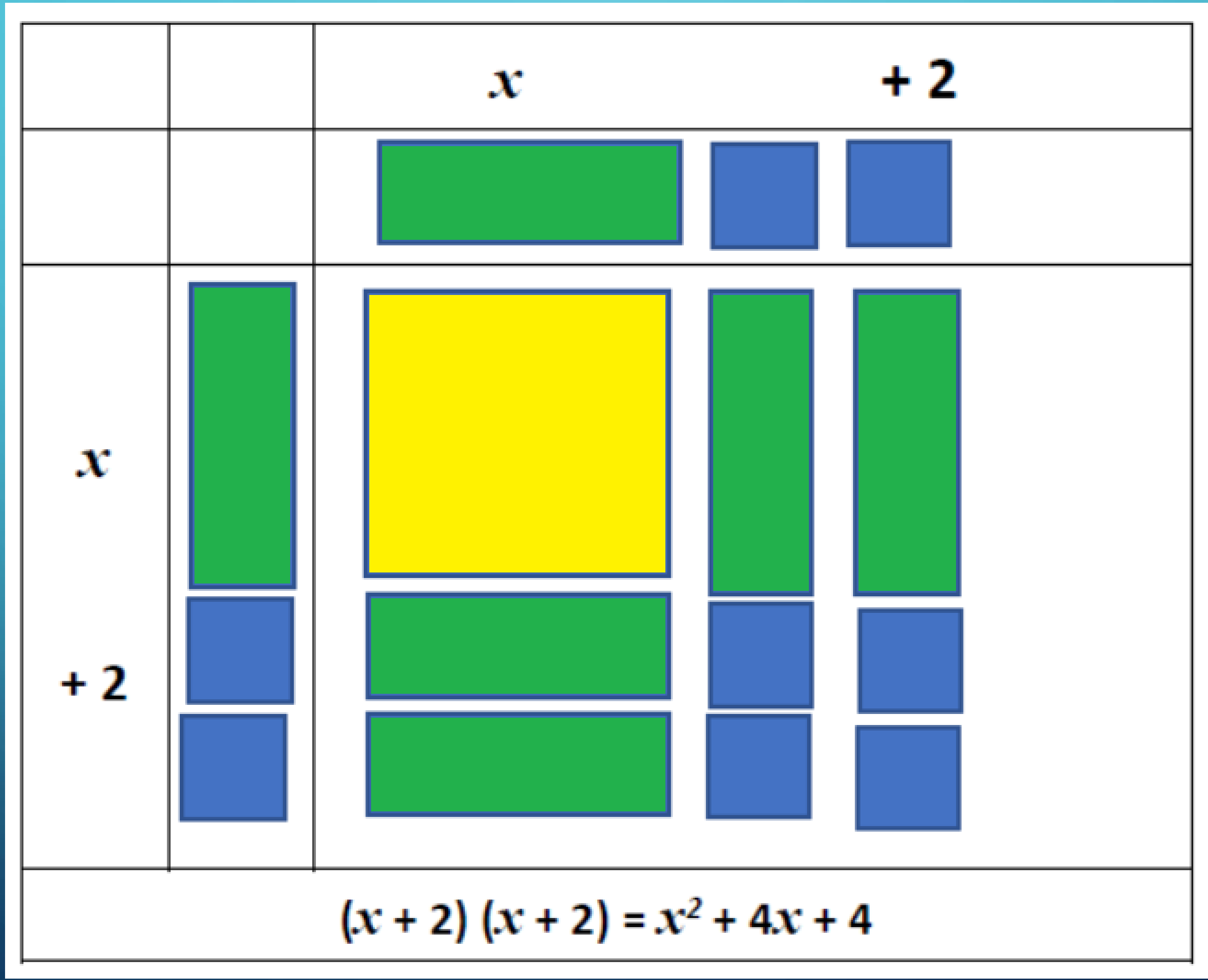
Npr. $x^2 - x - 6$



$$x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$$

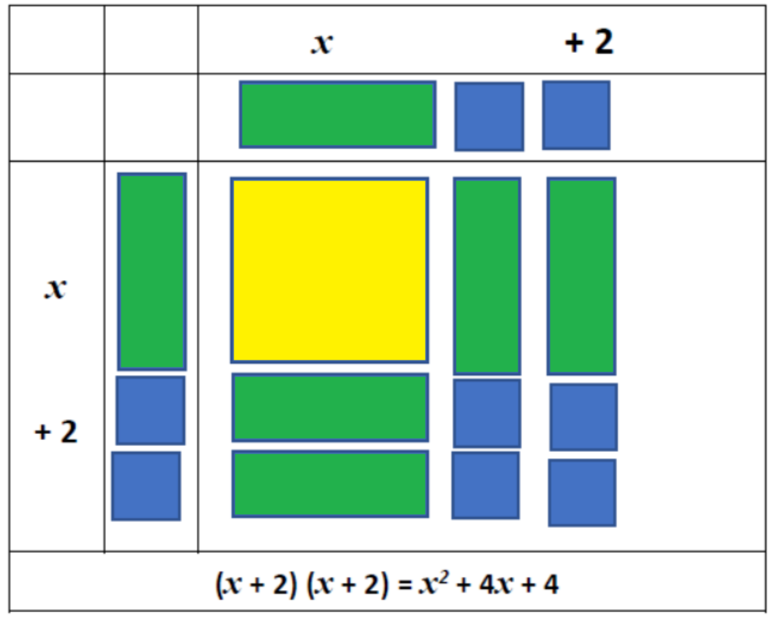
KVADRAT ZBROJA I KVADRAT RAZLIKE

Izračunajmo: $(x + 2) \cdot (x + 2)$



KVADRAT ZBROJA I KVADRAT RAZLIKE

Npr. $(x + 2) \cdot (x + 2)$



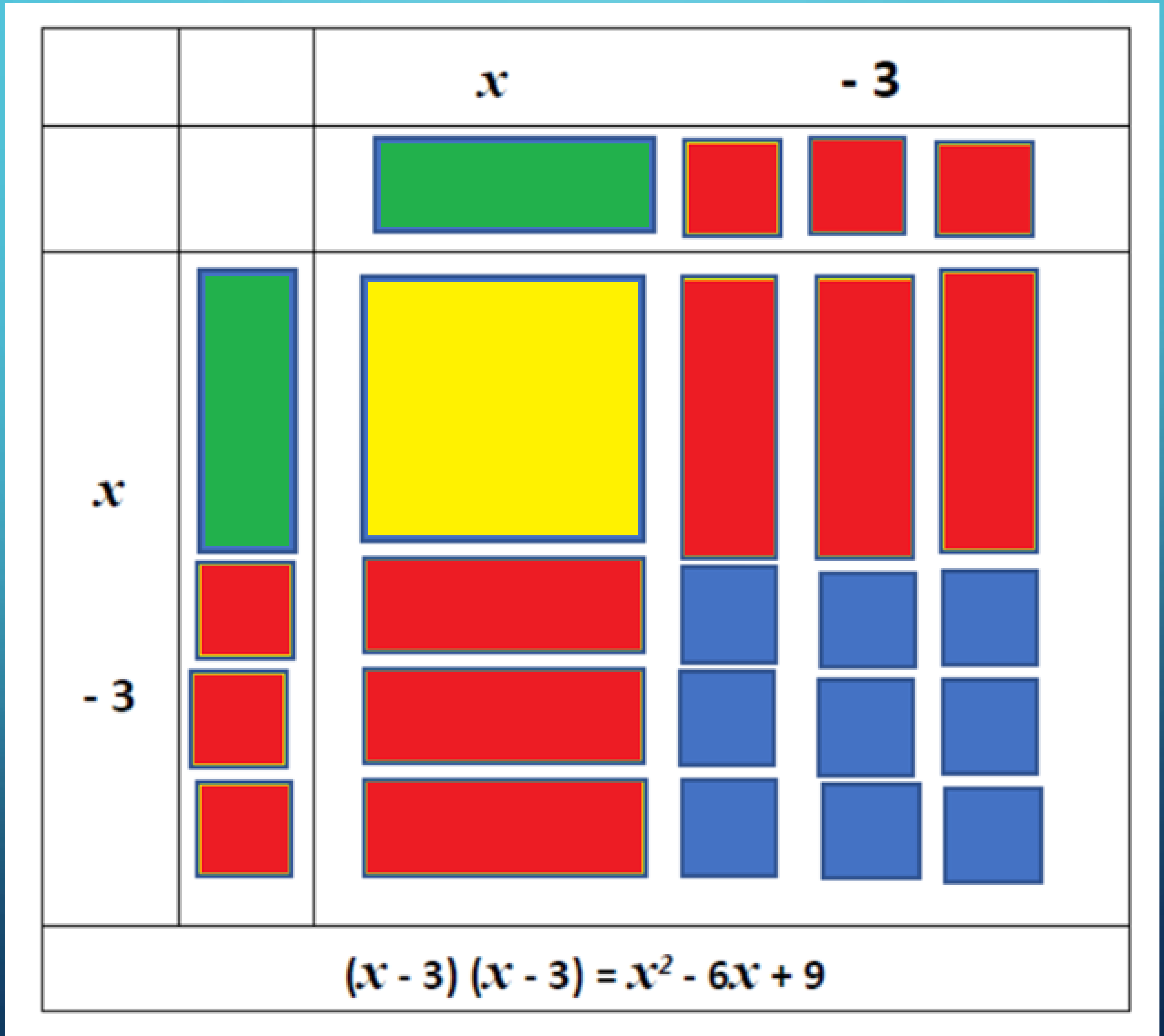
Zamolite učenike da uoče koja je razlika između ovog i ostalih proširenja koja su do sada modelirali.

Trebali bi moći vidjeti da ovaj raspored tvori kvadrat.

Zatim možete razgovarati zašto je to tako i kako biste drugačije mogli napisati izvorni izraz, tj.
$(x + 2) \cdot (x + 2) = (x + 2)^2$.

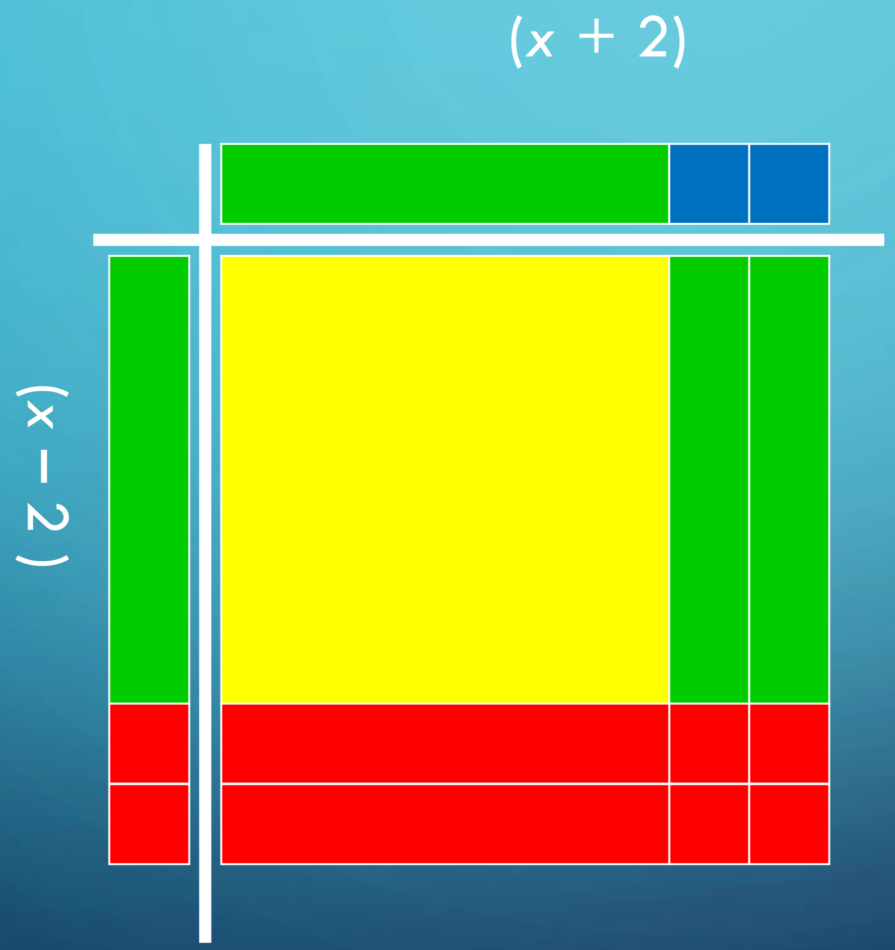
KVADRAT ZBROJA I KVADRAT RAZLIKE

Izračunajmo: $(x - 3) \cdot (x - 3)$



MNOŽENJE BINOMA

Izračunajmo: $(x - 2) \cdot (x + 2)$



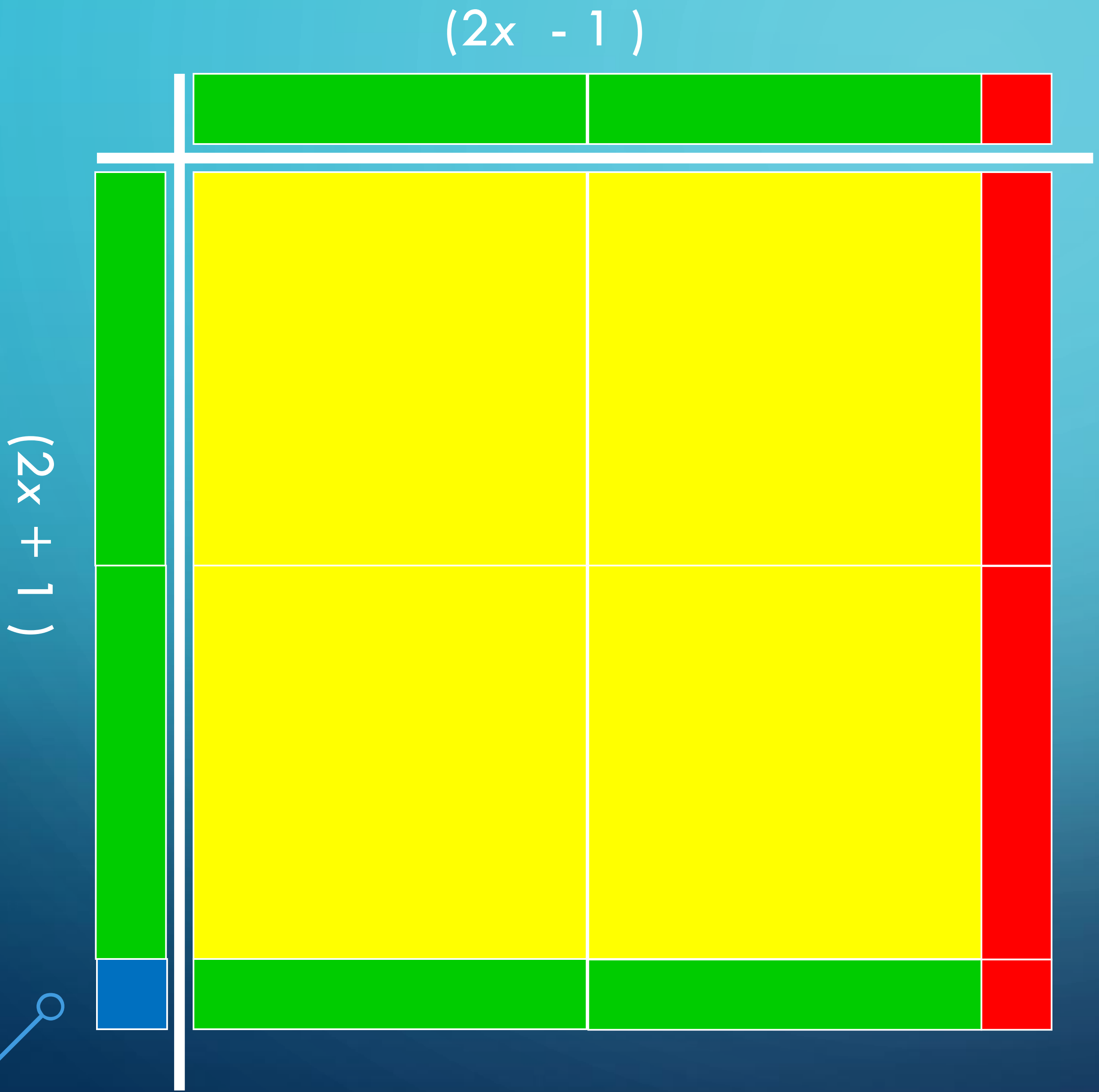
$(x - 2) \cdot (x + 2) = x^2 - 4$

RAZLIKA KVADRATA

Kako bismo pronašli faktore razlike savršenih kvadrata, prvo trebamo sastaviti kvadrat, a zatim dodati dijelove koji 'nedostaju' kako bismo dovršili pravokutnik (kvadrat).

Npr: $4x^2 - 1$

RAZLIKA KVADRATA



Npr: $4x^2 - 1$

1. modeliranje problema
2. dodavanje nul parova
3. uočavanje faktora

$$4x^2 - 1 = (2x + 1) \cdot (2x - 1)$$

FAKTORIZACIJA

ZADATCI

a) $x^2 + 5x + 6$

b) $x^2 + x - 6$

c) $x^2 - 10x + 9$

d) $x^2 - 1$

e) $x^2 - 4$

f) $2x^2 - 3x - 2$

g) $2x^2 + 3x - 2$

h) $-2x^2 + x + 6$

Hvala na pozornosti!

ivana.katalenac@skole.hr