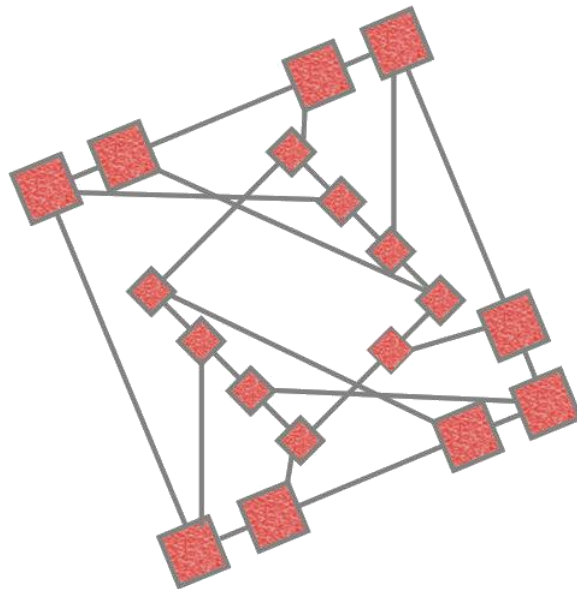


HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO



10. KONGRES NASTAVNIKA MATEMATIKE REPUBLIKE HRVATSKE

Zagreb, 1. – 2. srpnja 2024.

SVEUČILIŠNA SEKCIJA

VIZUALIZACIJA U DOKAZIMA IZ GEOMETRIJE

Marija Babić ¹, Ines Radošević Medvidović ²

¹ marija.babic@student.uniri.hr, ² inesr@math.uniri.hr

Fakultet za matematiku, Sveučilište u Rijeci, Radmile Matejčić 2, Rijeka, Hrvatska

Prošireni sažetak

Vizualizacija je oblik stvaranja mentalnih mapa ili vizija, odnosno proces kognitivne aktivnosti osobe koja prima vizualni podražaj. Svaki se slikovni prikaz može smatrati vizualizacijom, pa se tako i slika u matematici i slika u njezinu poučavanju smatraju vizualizacijom u matematici. Učenje matematike primjenom vizualizacije pomaže u razumijevanju i otkrivanju značenja matematičkih pojmova te veza između njih. Traženu matematičku tvrdnju može se opisati različitim slikama, a odabir slike dokaza ovisi o razini poučavanja i matematičkom predznanju. Kako bi učenici i studenti što lakše usvojili neke matematičke pojmove i kako bi se ti pojmovi što dulje zadržali u njihovu pamćenju, potrebno ih je vizualizirati, međusobno povezati i interpretirati ih u različitim matematičkim cjelinama.

Vizualni dokazi ili „dokazi bez riječi“ u matematici su oni koji se mogu prikazati samo slikom, ili možda slikom i kratkom formulom uz kratku priču. Takve je dokaze poželjno koristiti na svim razinama obrazovanja te su, za razliku od formalnih, „pravih“ dokaza, omiljeni među učenicima i studentima. Takvi im dokazi pomažu u razumijevanju matematičkih ideja, koncepata i dokaza tvrdnji te im omogućavaju lakše prihvaćanje i razumijevanje pravih matematičkih dokaza. „Nerazumljiv dokaz matematičkih tvrdnji može biti dopunjen geometrijskim analogonom tako jednostavnim i lijepim da je istina teorema vidljiva gotovo na prvi pogled“, riječi su Martina Gardnera (Nelsen, 2000.). Dokazi bez riječi posebno se koriste u poučavanju geometrije, gdje je vizualna metoda osnovni „alat“ za prikazivanje i tumačenje svojstava i odnosa ravninskih likova te računanje njihovih površina. U ovom radu bit će prikazane vizualizacije nekih osnovnih matematičkih pojmova i dokaza nekih tvrdnji u geometriji odnosno geometriji trokuta, kao što je dokaz Pitagorina poučka, poučka o sinusima, poučka o kosinusu, Marleyjeva teorema, Heronove formule i drugih, te vizualizacije nekih dokaza iz geometrije tetraedra.

Razumijevanje i prihvaćanje matematičkih istina na ispravan način obogaćuje nastavni proces, potiče učenike i studente na dublje promišljanje matematičkih istina te na istraživanje određenog matematičkog sadržaja. Kreativna vizualizacija ili sposobnost stvaranja mentalnih slika dokaza neke tvrdnje može biti dana na više načina, a upravo ta sloboda vizualizacije može učenicima i studentima biti motiv za istraživanje vizualnih dokaza u postojećoj literaturi ili istraživanje novih vizualizacija dokaza neke tvrdnje.

Ključne riječi: dokaz bez riječi, vizualizacija u nastavi matematike, vizualni dokaz

Literatura:

1. Alsina, C., Nelsen, R.B. (2006.): Math made visual: Creating Images for Understanding Mathematics, The Mathematical Association of America
2. Nelsen, R.B., (2000.): Proofs without words II, MAA, Washington
3. Pavković, B., Veljan, D. (1995.): Elementarna matematika 2, Školska knjiga, Zagreb
4. <https://math.stackexchange.com> (15. 3. 2024.)
5. <https://www.scribd.com/document/371255191/Dokazi-Bez-Rijeci> (4. 3. 2024.)

LIJEVO, DESNO - SIMETRIČNO!

Franka Miriam Brückler

franka.miriam.bruckler@math.hr

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sažetak

Od davnina simetrija je pojam kojeg ljudi povezuju s ljepotom i redom. U ovom predavanju ponovit ćete osnove matematike simetrija, saznati zašto kristali ne mogu biti pravilni ikosaedri ni dodekaedri, kako klasificirati objekte po simetriji i još mnogo toga - o povijesti, svojstvima i svakodnevnoj prisutnosti simetrija. Predavanje je prikladno za nastavnike svih razina obrazovanja od 5. razreda osnovne škole naviše.

MATEMATIČKO BOJENJE

Franka Miriam Brückler

franka.miriam.bruckler@math.hr

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sažetak

Na ovoj radionici sudionici će imati prilike isprobati bojenje nekoliko različitih predložaka s matematičkim uputama. Pritom će otkriti kako se svojstva vezana za djeljivost u skupu prirodnih brojeva, Pascalov trokut, vjerojatnost i još ponešto drugo mogu pretočiti u atraktivne i instruktivne grafike. Mole se sudionici da ponesu vlastite bojice ili flomastere u najmanje 6 boja. Radionica je prikladna za nastavnike osnovnih i srednjih škola.

TRIGONOMETRIJA TROKUTA NA ELIPSOIDU

Davor Devald

davor.devald@hotmail.com

Prošireni sažetak

U starijim izdanjima udžbenika iz matematike za prirodoslovno-matematičku gimnaziju (Dakić-Elezović, 2006.) obrađena je sferna trigonometrija koja se bavi proučavanjem sfernog trokuta. Budući da je Zemlja približno rotacijski elipsoid (sferoid), a ne sfera, od interesa je poopćiti poznate teoreme koji vrijede za sferni trokut, za trokut na elipsoidu.

Sferni je trokut dio sfere omeđen trima kružnim lukovima, od kojih svaki pripada nekoj glavnoj kružnici sfere. Analogon sfernog trokuta na elipsoidu je trokut kojemu su stranice dijelovi glavnih elipsa, tj. elipsa koje leže na elipsoidu, a središte im je u središtu elipsoida. Pojam se dalje poopćava do tzv. geodetskog trokuta na bilo kojoj plohi (Do Carmo, 1976.).

Poopćavamo osnovne rezultate kao što su Napierove formule za pravokutni sferni trokut, teorem o sinusima i teorem o kosinusu. Izvodimo formule za duljinu luka elipse i površinu trokuta na elipsi metodom za približno računanje. Razmatramo primjene dobivenih rezultata u proučavanju geometrije Zemlje. Uspoređujemo svojstva trokuta u ravninskoj i eliptičkoj geometriji.

Sadržaj sferne trigonometrije izostavljen je iz novih izdanja dodatka za matematičku gimnaziju, a ostavljeni su sadržaji poput vektora, matrica i linearnih sustava, koji se kasnije uče redovno na fakultetu.

Ključne riječi: sferni trokut, elipsoid, trigonometrija

Literatura:

1. Dakić, B., Elezović, N. (2006): Matematika 3, dodatak za 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, Element d.o.o., Zagreb
2. Do Carmo, M. P. (1976): Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall Inc., New Jersey
3. <https://mathworld.wolfram.com/Arithmetic-GeometricMean.html> (13. 5. 2024.)

SLOŽENA RAZMJERNOST VIŠE VELIČINA I NJEZINA PRIMJENA

Drago Francisković

drago.franciskovic@icloud.com

Prošireni sažetak

U ovom originalnom radu opisana je generalizacija upravne razmjernosti (proporcionalnosti) i obrnute razmjernosti dviju veličina za slučaj triju i više veličina. Neka je k pozitivan realan broj. Poznato je da su dvije pozitivne veličine x i y upravno razmjerne ako njihova međusobna ovisnost ima oblik $x = ky$ ili $y = kx$, a obrnuto razmjerne ako njihova međusobna ovisnost ima oblik $xy = k$.

Tri pozitivne veličine x, y i z međusobno su složeno razmjerne ako njihova međusobna ovisnost ima jedan od sljedeća tri oblika: $a_1 a_2 a_3 = k$, $a_1 a_2 = k a_3$ ili $a_1 = k a_2 a_3$, pri čemu se u svakom obliku umjesto varijabli a_1, a_2 i a_3 nalaze veličine x, y i z , i to svaka samo jednom u svakom od spomenutih oblika. Primjerice, ovisnosti $x = kyz$ (odnosno $x = kzy$), $y = kxz$ (odnosno $y = kzx$) i $z = kyx$ (odnosno $z = kxy$), ovisnosti su trećeg oblika, a ovisnost oblik $xyz = k$, odnosno ovisnosti $xzy = k$, $yxz = k$, $yzx = k$, $zxy = k$, $zyx = k$, ovisnosti su prvog oblika.

Na sličan se način definira i međusobna složena razmjernost četiriju i više pozitivnih veličina. Njihova međusobna ovisnost dana je u obliku jednakosti u kojoj je s lijeve strane jedna ili umnožak više veličina, a s desne konstanta k ili umnožak te konstante s umnoškom preostalih veličina. Ta jednakost osnovna je jednakost složene razmjernosti. Za dvije veličine s iste strane spomenute jednakosti, uz pretpostavku da su ostale veličine konstante, vrijedi da su obrnuto razmjerne. Za dvije konstante, jedne s lijeve i jedne s desne strane jednakosti, uz pretpostavku da su ostale veličine konstante, vrijedi da su upravno razmjerne.

Složena razmjernost više veličina, odnosno osnovna jednakost složene razmjernosti, može se koristiti za rješavanja zadataka koji se uobičajeno, na stari način, rješavaju shemom složenog pravila trojnog. Tim novim načinom rješavanje takvih zadataka postaje jednostavnije i razumljivije. U radu se nadalje na nekoliko primjera pokazuje prednost novog načina nad starim načinom rješavanja problema složenog pravila trojnog.

Ključne riječi: složena razmjernost, upravna razmjernost, obrnuta razmjernost, složeno pravilo trojno

Literatura:

1. Babić, Z., N. Tomić-Plazibat, N. (2008): Poslovna matematika, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split
2. Francišković, D. (2024.): Gospodarska i financijska matematika – suvremeni pristup, drugo dopunjeno izdanje, Element d.o.o., Zagreb
3. Štambuk, Lj. (2006): Poslovna matematika, Veleučilište u Karlovcu, Karlovac

ORIGAMI JE I UMJETNOST I MATEMATIKA

Martina Hrman ¹, Ines Radošević Medvidović ²

¹ martina.hrman@student.uniri.hr, ² inesr@math.uniri.hr

Fakultet za matematiku, Sveučilište u Rijeci, Radmile Matejčić 2, Rijeka, Hrvatska

Prošireni sažetak

Origami je tradicionalna japanska umjetnost stvaranja trodimenzijskih papirnatih modela nastalih samo tehnikom savijanja papira. Razlikuje se tradicionalni i modularni origami. Kod tradicionalnog origamija koristi se jedan papir, jednobojan ili dvobojan, u obliku pravokutnika ili kvadrata. Kod modularnog origamija koristi se više papira, od više individualnih dijelova koji se povezuju u cjelinu, čime nastaju složeniji modeli. Često je origami asocijacija na jednostavne papirnate oblike i kreativnu zabavu za djecu, no origami je puno više od toga. Osim što ima matematičku interpretaciju i primjenu u matematici, origami je vještina koja postaje sve prisutnija i primjenjivija u znanosti i tehnologiji, te ta povezanost znanosti i origamija otvara polje tzv. origami inženjeringa i dizajna primjenjivog u svemirskoj tehnologiji, logistici, medicini, strojarstvu, robotici i industriji općenito.

Origami se proširio po cijelome svijetu; s ovom su se tradicionalnom tehnikom presavijanja papira upoznali mnogi pa ona svakim danom postaje sve popularnija, o čemu svjedoče brojni obožavatelji, umjetnici, matematičari, informatičari, sudionici brojnih manifestacija i organizacija, te objavljene knjige i stranice na internetu. Matematičarima je origami postao zanimljiv početkom 20. stoljeća kada je počelo istraživanje geometrije origamija, a najvjerojatnije potaknuto knjigom S. T. Rowa „Geometrijske vježbe u savijanju papira“. Na skupu 1989. godine, nazvanom *Prvi međunarodni skup znanosti i tehnologije origamija*, prvi je put prikazana i prezentirana studija o origami konstrukcijama i matematici origamija. Kao što postoje točna pravila ili aksiomi geometrijskih konstrukcija, tako postoje i pravila kod origami konstrukcija koja su krajem 20. stoljeća formirali matematičari Humiaki Huzita i Koshiro Hatori, a nose naziv *Huzita-Hatori aksiomi*. Aksiomatski utemeljen origami stvara novi matematički model rješavanja konstruktivnih problema koji nadilazi mogućnosti konstrukcija ravnalom i šestarom. Origamijem se mogu konstruirati sve geometrijske figure koje se mogu konstruirati ravnalom i šestarom, ali i neki pravilni poligoni koji se ne mogu tako konstruirati. Također se mogu riješiti klasični problemi udvostručenja kocke i trisekcije kuta, što ćemo prikazati u ovome radu.

Vizualizacija u nastavi matematike ima veliku ulogu pa je primjena origamija u nastavi matematike vrlo poželjna. Origamijem se mogu vizualizirati različiti geometrijski pojmovi i matematički objekti poput centralne i osne simetrije, sukladnosti i sličnosti, kutova i simetrala kuta, paralelnosti i okomitosti, presjeka pravaca i ravnina, poligona i poliedara, površina i volumena, te dokazati neki teoremi. Osim doprinosa u učenju matematike, izrada origamija razvija mnoge druge vještine kod učenika kao što su samostalnost, preciznost u radu i kreativnost.

Ključne riječi: aksiomi origamija, konstrukcije, origami

Literatura:

1. Alperin, R.C. (2000.): Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers, The New York Journal of Mathematics
2. Hull, T.C. (2020.): Origametry: Mathematical Methods i Paper Folding, Cambridge University Press
2. Jukić, Lj. (2007): Matematika i origami, Osječki matematički list, god. 7, br. 1, str. 23-32.
3. <https://langorigami.com/> (20. 3. 2024.)
4. https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_09/papers/Sheri.pdf (7. 4. 2024.)

STATISTIČKA ANALIZA PREDZVANJA STUDENATA – POMOĆNI ALAT U NASTAVNOM PROCESU

Renata Kožul Blaževski, Julija Mardešić, Ivo Baras

rkozulb@oss.unist.hr, ibaras@oss.unist.hr, mardesic@oss.unist.hr

Sveučilište u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije

Prošireni sažetak

Početak svakog semestra i nova generacija studenata postavljaju pred nastavnika dilemu vezanu uz razinu matematičkih predznanja studenata. Jedina dostupna informacija o tom predznanju podatci su o rezultatima državne mature jer većina studenata ne polaže prijamne ispite. Ti podatci daju samo općenitu informaciju o razini predznanja studenata pa se temeljem njih ne može donijeti konkretan i informativan zaključak o usvojenosti gradiva po područjima. Stoga je potrebno provesti dodatnu analizu kako bi nastavnik stekao detaljniju predodžbu o razini predznanja studenata.

Statistička analiza predznanja studenata može biti izuzetno korisna kao pomoćni alat u nastavnom procesu, između ostalog i prilikom donošenja konkretnih zaključaka o razini matematičkog predznanja. Na temelju rezultata anketa ili testova, nastavnici mogu identificirati područja u kojima je razina predznanja nezadovoljavajuća i na temelju toga promišljati i planirati načine i metode poučavanja. U ovom je radu ilustriran jedan od načina na koji se može provesti statistička analiza predznanja. Analizirano je matematičko predznanje studenata prve godine na temelju ankete i testa znanja. Anketa se sastojala od pitanja vezanih uz srednjoškolsko obrazovanje i državnu maturu, a testom je ispitana razina predznanja studenta iz područja koja su nužna za uspješno usvajanje gradiva iz matematičkih kolegija, a navedena su u ispitnom katalogu državne mature za osnovnu razinu. Analizirani su ukupni rezultati testa i rezultati pojedinačnih zadataka, te su uspoređeni rezultati studenata koji su polagali osnovnu razinu i studenata koji su polagali višu razinu državne mature iz matematike.

Korištenje statističkih metoda u analizi predznanja daje realniji i detaljniji uvid u predznanje studenta, što pridonosi boljem planiranju nastavnog procesa, kao i planiranju i provođenju izmjena izvedbenih planova matematičkih predmeta te studijskih programa.

Ključne riječi: matematičko predznanje, državna matura, statistička analiza

Literatura:

1. Baranović, N., Baras, I. i Kožul Blaževski, R. (2020): Kako premostiti razliku između onoga što studenti prve godine znaju i onoga što mi mislimo da bi trebali znati. Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike, 21(81), str. 13-33.
2. Davis, G., Pecar, B.: BUSINESS STATISTICS using EXCEL, Second edition, Oxford University Press, Oxford 2013.
3. <https://www.ncvvo.hr/> (15. 9. 2023.)