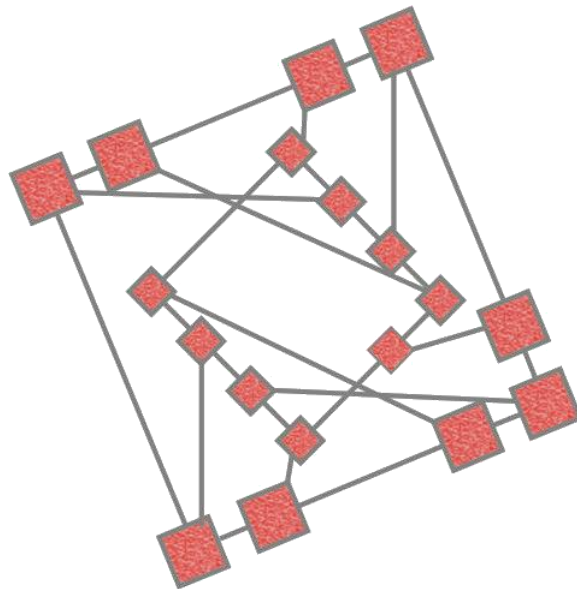


# HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO



## 10. KONGRES NASTAVNIKA MATEMATIKE REPUBLIKE HRVATSKE

Zagreb, 1. – 2. srpnja 2024.

## SEKCIJA SREDNJE ŠKOLE



## RAZVOJ „GEOMETRIJSKOG OKA“

**Nives Baranović**

[nives@ffst.hr](mailto:nives@ffst.hr)

Filozofski fakultet u Splitu

**Branka Antunović**

[bantunovic@unipu.hr](mailto:bantunovic@unipu.hr)

Sveučilište Jurja Dobrile Pula, Fakultet za  
odgojne i obrazovne znanosti

### Prošireni sažetak

Razvojem „geometrijskog oka“, odnosno sposobnosti uočavanja, identificiranja i povezivanja odgovarajućih dijelova unutar složene cjeline u svrhu otkrivanja geometrijskih svojstava te odgovarajuće matematičke poruke, osigurava se geometrijska snaga pojedinca potrebna u rješavanju problema i dokazivanju tvrdnji. Proces razvoja „geometrijskog oka“ započinje stjecanjem praktičnog iskustva, postavljanjem tvrdnji temeljenih na učenom te argumentiranjem njihove istinitosti povezivanjem s već poznatim definicijama, aksiomima i teoremima. Dodatno, rješavanjem odgovarajućih zadataka za razvoj „geometrijskog oka“ razvijaju se i odgovarajući oblici mišljenja i obratno.

U kratkom izlaganju opisat će se proces razvoja „geometrijskog oka“ koji se može i treba trenirati, a na radionici sudionici će se upoznati s odgovarajućim zadacima koji prate opisani proces. Nakon rješavanja zadataka, samostalno ili u grupama, uslijedit će rasprava i zaključci o svrhovitosti i mogućnostima odabranih zadataka.

S obzirom na to da je rješavanje zadataka najčešća aktivnost u nastavi matematike, cilj izlaganja i radionice jest ukazati upravo na različite vrste zadataka kojima se potiče razvoj „geometrijskog oka“ kao i različitih oblika mišljenja, a sve to s namjerom funkcionalnog povezivanja matematičkih procesa i domena u svrhu ostvarivanja ishoda učenja geometrije.

**Ključne riječi:** algebarsko mišljenje, funkcijsko mišljenje, geometrijsko mišljenje, vizualno mišljenje

### Literatura:

1. Antunovic-Piton, B., & Baranovic, N. (2022a). Factors affecting success in solving a stand-alone geometrical problem by students aged 14 to 15. *CEPS Journal*, 12(1), 55-79.
2. Baranović, N. & Antunović-Piton, B. (2021) Ways of discovering general rules of growing geometric patterns by students aged 15 to 17 In: Kolar-Begović, Z., Kolar-Šuper, R. & Katalenić, A. (ed.) *The 8th International Scientific Colloquium MATHEMATICS AND CHILDREN founded by Margita Pavleković.*

3. Fujita, T., & Jones, K. (2002). The bridge between practical and deductive geometry: developing the 'geometrical eye'. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME26)* (pp. 384-391). PME.

## OD PRIMJERA DO MODELA

Daniela Beroš, Milena Čulav Markičević, Zlatko Lobar, Ivana Martinić

[daniela.beros@skole.hr](mailto:daniela.beros@skole.hr), [milena.culav@skole.hr](mailto:milena.culav@skole.hr), [zlatko.lobor1@skole.hr](mailto:zlatko.lobor1@skole.hr),  
[ivana.martinic@skole.hr](mailto:ivana.martinic@skole.hr)

V.gimnazija, Zagreb

### Prošireni sažetak

U sklopu međunarodnoga projekta TIME (Teachers' Inquiry in Mathematics Education) upoznali smo se s metodom profesionalnog razvoja poznatom kao *Studija nastavnog sata* (eng. *Lesson Study*) čiji jedan ciklus uključuje identificiranje i proučavanje problema u poučavanju, planiranje nastavnog sata, izvođenje i kolegijalno promatranje osmišljenog sata te sustavnu raspravu na kraju. U jednoj od naših studija nastavnog sata obradili smo temu *Udaljenost i kut* u geometriji prostora u drugom razredu srednje škole.

Na temelju našeg iskustva, primijetili smo da učenici često imaju poteškoće s definiranjem osnovnih pojmova u stereometriji vizualizacijom geometrijskog problema i primjenom definicija na samo rješavanje problema. Htjeli smo dati priliku učenicima da sami otkriju važne definicije umjesto da reproduciraju već postojeće formalne definicije. Osim definiranja osnovnih pojmova iz stereometrije, kao što su udaljenost i kut, od učenika se očekivalo razumijevanje napisanih definicija, izrada odgovarajućeg manipulativnog modela od ponuđenih materijala na temelju zadane definicije i rješavanje problema iz stvarnog života. Zanimalo nas je koliko će definicije učenika biti slične formalnim definicijama koje nalazimo u udžbenicima, hoće li biti točne, koliko će precizno učenici zapisati svoje definicije te hoće li biti moguće na osnovi tuđe definicije napraviti odgovarajuće modele. Ponajviše nas je zanimalo hoće li ova radionica pomoći učenicima da pravilno primjenjuju definicije pri budućem rješavanju problema iz stereometrije.

Za vrijeme radionice polaznike ćemo provesti kroz isti proces kroz koji su prolazili naši učenici za vrijeme nastavnog sata. Radeći u skupinama, polaznici će prvo dobiti zadatak da na temelju primjera iz neposrednog okruženja definiraju jedan od pojmova iz geometrije prostora. Nakon toga će razmijeniti svoju definiciju s drugom skupinom kako bi napravili potrebne preinake te nakon još jedne razmjene izraditi manipulativni model na temelju dobivene definicije.

Na kraju ćemo prikazati povratne informacije i zapažanja učenika, kao i neke primjere njihovih definicija i modela. Osvrnut ćemo se na poteškoće i izazove s kojima smo se i mi i učenici susreli, kao i na pozitivna iskustva i razloge zbog kojih i dalje nastavljamo provoditi radionicu u našoj školi, naglašavajući važnost preciznog definiranja i ljepotu jednostavnosti, kako su to i naši učenici istaknuli u povratnim informacijama.

**Ključne riječi:** kut, stereometrija, udaljenost

**Literatura:**

1. <https://time-project.eu/>

## UTJECAJ DRUŠTVENE PODRŠKE NA ISHODE MENTALNOG ZDRAVLJA – STATISTIČKA PERSPEKTIVA

**Manuela Brnčić Dadić, Marija Jurišić Šarlija**

[manuela.brncic-dadic@skole.hr](mailto:manuela.brncic-dadic@skole.hr), [marija.jurismic-sarlija@skole.hr](mailto:marija.jurismic-sarlija@skole.hr)

Obrtna tehnička škola Split, Zdravstvena škola, Split

### Prošireni sažetak

Radionica „Utjecaj društvene podrške na ishode mentalnog zdravlja – Statistička perspektiva“ posvećena je važnosti mentalnog zdravlja u obrazovanju. Današnji mladi suočavaju se sa sve većim izazovima i pritiscima koji mogu imati negativan utjecaj na njihovo mentalno zdravlje.

Cilj radionice je unaprijediti socijalne i psihološke kompetencije učenika te metodičke kompetencije učitelja i nastavnika kroz prizmu statističke obrade podataka. Fokusirana je na područje Podatci, statistika i vjerojatnost, istovremeno potičući svijest o komunikaciji u prepoznavanju i pružanju psihološke podrške učenicima, posebice kroz međupredmetnu temu Zdravlje.

U uvodnom dijelu, radionica se fokusira na ključne aspekte mentalnog zdravlja u kontekstu obrazovanja, s posebnim naglaskom na ispitnu anksioznost.

Glavni dio radionice pruža metodičke smjernice za analizu podataka koristeći matematičke alate i statistiku, s ciljem usvajanja odgojno-obrazovnih ishoda iz domene Podatci, statistika i vjerojatnost prema Kurikulumu nastavnoga predmeta Matematika. Voditelji će pokazati kako se ova tema može povezati s ishodom *Barata podatcima prikazanim na različite načine* (domenom statistika) kroz primjere listića sa zadacima koji se direktno dotiču pitanja mentalnog zdravlja. Listići nisu samo sredstvo za učenje statističkih koncepata, već i prilika za podizanje svijesti o važnosti mentalnog zdravlja u obrazovnom okruženju. Imaju za cilj kod učenika razvijati empatiju prema osobama/učenicima s problemima u području mentalnog zdravlja.

Na kraju, otvorit ćemo prostor za raspravu i razmjenu ideja o tome kako možemo dalje unaprijediti svoju praksu da bismo održali mentalno zdravlje naših učenika.

Kroz ovu radionicu, učitelji i nastavnici matematike imaju priliku unaprijediti svoje metodičke i pedagoške kompetencije. Koristeći matematičke sadržaje i alate, razvijaju tehnike psihološke podrške za učenike te socijalne vještine za izgradnju povjerenja, što doprinosi jačanju njihovog mentalnog zdravlja. Ovaj pristup omogućuje integraciju matematike u podršku učenicima na emocionalnoj i socijalnoj razini, što može poboljšati ukupno iskustvo učenja i razvoj učenika.

Zaključno, ova radionica pruža vrijedne alate i smjernice koje omogućuju nastavnicima matematike da postanu osvješteniji o potrebama mentalnog zdravlja svojih učenika te da im pruže adekvatnu podršku kroz svoj nastavni rad. Integracija matematike sa psihološkim i pedagoškim pristupima osigurava holistički pristup obrazovanju koji može doprinijeti općoj dobrobiti učenika i njihovu uspjehu u školi i izvan nje.

**Ključne riječi:** mentalno zdravlje, statistika

**Literatura:**

1. <https://www.geeksforgeeks.org/box-plot/> (5. 4. 2024.)
2. [https://deseta-gimnazija.hr/?page\\_id=4631](https://deseta-gimnazija.hr/?page_id=4631) (5. 4. 2024.)
3. <https://sprc.org/settings/colleges-and-universities/consequences-of-student-mental-health-issues/> (8. 4. 2024.)



# STATISTIČKA ANALIZA OBRADJE OKOLIŠA U FAKULTATIVNOM PREDMETU KVALITETA OKOLIŠA

**Mirela Brumec**

[mirela.brumec@skole.hr](mailto:mirela.brumec@skole.hr)

Medicinska škola Varaždin

## Prošireni sažetak

Statistika igra ključnu ulogu u srednjoškolskom obrazovanju jer razvija analitičke vještine koje nisu važne samo u matematici, već i u različitim aspektima života. Razumijevanje osnovnih statističkih koncepata omogućava učenicima prikupiti, analizirati, obraditi, interpretirati i prikazati podatke.

Statistika je interdisciplinarna znanost koja se koristi u mnogim područjima, od matematike, prirodnih znanosti i tehnologije, ekonomije, sociologije i psihologije, do medicine, geografije i drugih. Zato se javila ideja povezivanja kemije, biologije, fizike, informatike i statistike u fakultativnom predmetu *Kvaliteta okoliša* kroz projekt Uspostave Regionalnog centra kompetentnosti inovativnih zdravstvenih tehnologija pri Medicinskoj školi Varaždin.

Glavni cilj poučavanja nastavnog predmeta *Kvaliteta okoliša* je učenika staviti u aktivnu poziciju u nastavnom procesu nizom projektnih aktivnosti i pripremiti ga za cjeloživotno učenje. Učenik je u središtu nastavnog procesa primjenom novih metoda učenja i poučavanja. Uvođenjem projektne i istraživačke nastave pred učenika se stavlja zadatak samostalnog istraživačkog pristupa problemu, odabira prikladne statističke metode za analizu određene pojave i argumentiranog zaključivanja temeljem dobivenih rezultata.

Kroz izlaganje bi se sudionicima prikazao kurikulum cijelog predmeta koji je složen kao priručnik za rad te sadrži: svrhu i opis nastavnog predmeta, odgojno-obrazovne ciljeve učenja i poučavanja, strukturu predmetnog kurikuluma, odgojno-obrazovne ishode, sadržaje i razine usvojenosti po konceptima, povezanost s drugim predmetima i međupredmetnim temama, učenje i poučavanje nastavnog predmeta te vrednovanje usvojenosti odgojno-obrazovnih ishoda.

Strukturu predmeta čine tri makrokoncepta:

- A. biološka i kemijska analiza kvalitete okoliša,
- B. fizikalna analiza okoliša,
- C. statistička obrada analize okoliša pomoću računalnih alata.

Naglasak u izlaganju stavio bi se na statističku obradu analize okoliša te bi se prikazali rezultati rada u jednom periodu provedbe predmeta.

Kako statistika potiče kritičko mišljenje i sposobnost procjene informacija, tako učenje kako interpretirati statističke podatke pomaže učenicima da razviju sposobnost prepoznavanja i razumijevanja manipulacije podacima u medijima, politici, svakodnevnom životu i okolišu koji ih okružuje.

**Ključne riječi:** kurikulum, podatci, statistika

## PROJEKTNO UČENJE

Aneta Copic, Eva Špalj

[acopic@mioc.hr](mailto:acopic@mioc.hr), [espalj@mioc.hr](mailto:espalj@mioc.hr)

XV. gimnazija, Zagreb

### Prošireni sažetak

U suvremenoj je nastavi naglasak poželjno staviti na proces učenja koji je smješten u realni kontekst i koji je potaknut od strane učenika. Također je važno da omogućuje dugoročno pamćenje. Jedna od takvih metoda je projektno usmjereno učenje.

Projektno se učenje zbiva za vrijeme nastave i može trajati dulji period. Učenici rješavajući njima bliski problem usvajaju nova znanja i vještine. Provođenje projektnog učenja zahtijeva dobru, opsežnu pripremu, ali trud se isplati, jer takvo učenje potiče razvoj komunikacijskih i istraživačkih vještina te suradničko učenje. Nastavnik kreira projekt zajedno s učenicima, dogovara temu te određuje cilj i ishode učenja. Tijekom projekta učenicima osigurava potrebne resurse, organizira aktivnosti i upravlja projektom. Učenicima pruža podršku na način da potiče diskusiju tako da postavlja otvorena pitanja, bez da očekuje odgovor. Učenici radeći u skupinama, provode aktivno istraživanje, dokumentiraju svoj proces učenja te kreiraju proizvod kojim će pokazati svoje učenje i razumijevanje. Na kraju slijedi refleksija u kojoj analiziraju proces i povratne informacije dobivene od drugih skupina kao i nastavnika.

U okviru Erasmus+ projekta STEPS koji se provodi u XV. gimnaziji učenici su kao rezultat projektnog učenja izradili društvene igre na temu invazivnih vrsta.

Na radionice će sudionici proći kroz sve faze projektnog učenja, od poticanja znatiželje, odnosno određivanja teme do kreiranja i prezentacije rezultata/proizvoda.

**Ključne riječi:** istraživačka nastava, komunikacijske vještine, proces, projektno učenje, rješavanje problema

### Literatura:

1. <https://www.pblworks.org/> (18. 3. 2024.).
2. <https://www.teacheracademy.eu/course/project-based-learning/> (5. 4. 2024.)



## MOZAK, OLOVKA, PAPIR

Milena Čulav Markičević

[milena.culav@skole.hr](mailto:milena.culav@skole.hr)

V. gimnazija, Zagreb

### Prošireni sažetak

Novo – igrifikacija. Igrifikacija je proces transformacije običnih zadataka u igru. Koriste se elementi igre poput nadmetanja, nagrada ili bodovanja kako bi se potaknulo željeno ponašanje. Želimo učenike motivirati da aktivno sudjeluju u učenju i ostvaruju postavljene ciljeve. Neke od prednosti igrifikacije u procesu obrazovanja su veći angažman učenika, zabavno i interaktivno učenje, poboljšano iskustvo učenja, vlasništvo nad učenjem (samostalno donose odluke i vide posljedice svojih postupaka), opušten stav prema neuspjehu.

Staro – nema digitalnih alata. Sve što učenicima treba za ovu igru je mozak, olovka i papir. Pažljivim planiranjem igre možemo izbjeći probleme igrifikacije poput prenatrpanosti aspekta natjecanja, pretjeranog fokusa na nagradu umjesto na učenje, prekomjerne upotrebe tehnologije, neusklađenosti s ciljevima obrazovanja, nedovoljne inkluzivnosti.

Predstavit ću autorsku igru koja se igra u paru te traje dio sata – to može biti i samo 10 minuta. Igramo je u četvrtom razredu, cjelina *Funkcije*, jedinica *Svojstva funkcije*. Definicijom funkcije, njezinim grafom i njezinim svojstvima bavimo se sve od prvog razreda – od linearne, preko funkcije apsolutne vrijednosti, kvadratne, racionalne, eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijskih pa do potpuno općenitih funkcija. Polako se uvode pojmovi injekcije, surjekcije, bijekcije, monotonosti, parnosti, periodičnosti i omeđenosti. Učimo kako izgledaju grafovi funkcija koje imaju ili nemaju neka od navedenih svojstava. Jednom kada smo ponovili sva svojstva i njihov utjecaj na graf funkcije, spremni smo za igru čiji je cilj utvrđivanje baš toga gradiva.

Pravila igre i način bodovanja lako se objasne pa nadmetanje može brzo početi. Možete zadati da se igra do kraja sata, ili 10 minuta, ili dok jedan od igrača ne prikupi 10 bodova, ili...

Učenici na početku igru igraju „jer sam ja tako rekla“, no vrlo brzo shvate da mogu razvijati strategiju i počinju pažljivije birati svoje poteze. Istovremeno uče i izazivači i rješavači jer žele biti sigurni da su bodovi pošteno dodijeljeni. Igra ispunjava svoju obrazovnu svrhu i odmiče se od pukog „klikanja“ da bi „osvojili pehar“. Posebno je zanimljivo kada nabasaju na kombinaciju za koju rješenje ne postoji pa kreiraju nove moždane putove. Ispostavilo se da je ovo jedna od „a jeste nas navukli“ igara.

**Ključne riječi:** funkcije, igra, svojstva

**Literatura:**

1. Skupina autora (2023.): Smjernice za igrifikaciju nastavnog procesa, Hrvatska akademska i istraživačka mreža – CARNET, Zagreb (<https://www.e-skole.hr/wp-content/uploads/2023/10/Smjernice-za-igrifikaciju-final-2023-10-06.pdf>)

## MREŽA I OPLOŠJE KOSE PRIZME

Vesna Filipčić, prof.

[filipcic.vesna@gmail.com](mailto:filipcic.vesna@gmail.com)

OŠ dr. Vinka Žganca, Zagreb

### Prošireni sažetak

Još kao srednjoškolka, prije četrdesetak godina, na temi oplošja i volumena geometrijskih tijela shvatila sam da izostanak računanja oplošja i crtanja mreže kosih tijela u mom gimnazijskom udžbeniku nije slučajna. Iako je prva pomisao da je plašt kose prizme, po analogiji s uspravnim prizmom, paralelogram, brzo se uviđa da je taj odgovor pogrešan.

Nakon što sam završila fakultet te počela raditi u školi, povremeno sam se vraćala na problem mreže kosih prizmi jer sam željela moći izraditi modele i uputiti učenike na dodatnoj nastavi iz matematike na njihovu izradu. Primijetila sam da jednostavnog odgovora, primjerenog uzrastu i predznanju učenika osnovne, ali i srednje škole, nema u dostupnoj literaturi. (Napominjem da se sve odvijalo puno prije no što je GeoGebra dobila svoju 3D varijantu.)

Stoga sam pokušala sama iznaći način i otkriti postupak crtanja (konstrukcije) mreže kose prizme, a zatim i računanja njezina oplošja. Najveći problem predstavljali su teško određivi kutovi pobočki te činjenica da učenici osnovne škole, u kojoj sam tada radila, zaista nemaju dovoljno predznanja za izračunavanje njihovih veličina.

Nakon kratkog vremena u kojem sam se posvetila problemu crtanja mreže i izrade modela kose prizme proizvoljne baze, visine i nagiba, došla sam do relativno jednostavnog rješenja koje je moguće ostvariti već i s učenicima osmih razreda, dok je sa srednjoškolcima moguće i pristupiti računanju oplošja takvih tijela. Predznanje za izradu modela uključuje poznavanje Pitagorina poučka, ortogonalne projekcije točke na ravninu te osnovnih konstrukcija trokuta odnosno eventualno pravilnih mnogokuta.

U to vrijeme sve su potrebne teme bile obuhvaćene gradivom matematike u osmome razredu, tako da su učenici na dodatnoj nastavi mogli, nakon mojih uputa, samostalno izraditi modele kosih prizmi. Moram reći da su mnogi od njih bili vrlo zainteresirani i prilično oduševljeni izgledom tih „neobičnih“ nagnutih prizmi, i bili su motivirani za cijeli postupak. Što se tiče računanja oplošja, to je moguće tek nakon upoznavanja s Heronovom formulom i u tom je slučaju postupak relativno jednostavan.

Danas, na žalost, po novome kurikulumu, ortogonalna projekcija točke na ravninu nije više obvezan sadržaj u 8. razredu, a učenička spretnost u korištenju geometrijskoga pribora iz godine u godinu sve više opada. No, s druge strane, gotovi modeli kosih tijela još uvijek plijene pažnju učenika, čak i mnogih koji općenito ne pokazuju poseban interes za matematiku. Osim

što takvi modeli mogu poslužiti u nastavi kod usvajanja pojma prizme (uspravne, pravilne), njihova neobičnost još uvijek pokreće pojedine učenike da se odluče potruditi oko izrade modela. Pri tome nije nevažno primijetiti da je danas, kad je digitalizacija uzela maha do te mjere da učenici ubrzano gube spretnost i preciznost u radu vlastitim rukama, možda mali odmak od ekrana i tipkovnice korak u dobrome smjeru za cjelokupan razvoj mladoga čovjeka.

**Ključne riječi:** kosa prizma, mreža kose prizme, oplošje kose prizme



## VIZUALNI PRIKAZ PRIMJENE PRINCIPA SUME I PRINCIPA PRODUKTA U RAČUNANJU VJEROJATNOSTI

Drago Francišković

[drago.franciskovic@icloud.com](mailto:drago.franciskovic@icloud.com)

### Prošireni sažetak

U radu se prezentira vizualni prikaz 'razbijanja' događaja/skupova čiju vjerojatnost tražimo na manje skupove primjenom principa sume i principa produkta. Takav vizualni prikaz olakšava učenicima i studentima lakše razumijevanje 'podjele' složenijeg događaja/skupa na više jednostavnijih događaja/skupova. Primjena vizualnog prikaza demonstrira se na više primjera.

Klasična definicija vjerojatnosti kaže da je vjerojatnost događaja jednaka kvocijentu broja za događaj povoljnih elementarnih ishoda i broja sveukupno mogućih elementarnih ishoda. Kako su događaji u biti skupovi, osnovno je pitanje u klasičnoj definiciji vjerojatnosti pitanje prebrojavanja skupova. Za to se koristi kombinatorika koja uključuje principe prebrojavanja, princip sume i princip produkta. Primjenom principa prebrojavanja problem prebrojavanja većeg skupa svodi se na više problema prebrojavanja manjih skupova.

Primjerice, ukoliko se od sveukupno 32 karte izvlači 5 karata i traži vjerojatnost da su sve izvučene karte iste boje, tada bismo mogli napraviti particiju skupa/događaja na 4 disjunktna podskupa. Svaki podskup je skup od 5 karata iste boje, koje mogu biti herc (h), karo (k), pik (p) i tref (t). Vizualno se ti disjunktni podskupovi odnosno događaji mogu prikazati na sljedeći način:  $\boxed{h h h h h}$ ,  $\boxed{k k k k k}$ ,  $\boxed{p p p p p}$ ,  $\boxed{t t t t t}$ . Zatim se primijeni princip sume.

Primjerice, ako se izvlači 5 karata i traži vjerojatnost da su izvučene točno tri boje i točno dvije sedmice, tada bismo mogli napraviti particiju skupa/događaja na dva disjunktna podskupa te tada primijenimo princip sume. Prvi događaj/skup je događaj koji isključuje izvlačenje karo sedmice (k7), tj. događaj/skup kada su izvučene 3 boje karo (k) među kojima nema sedmice (7) i dvije sedmice među kojima nema boje karo. Takav događaj odnosno skup možemo vizualno predočiti s  $\boxed{k k k | 7 7}$ . Drugi događaj/skup je događaj u kojem se sigurno pojavljuje karo sedmica, tj. događaj u kojem su pored karo sedmice izvučene i sljedeće karte: dvije karo karte među kojima nema karo sedmice, jedna sedmica koja nije karo sedmica i jedna karta koja nije niti karo niti sedmica (x). Takav događaj odnosno skup možemo vizualno predočiti s  $\boxed{k k | k7 | 7 | x}$ . Prvi događaj može se prikazati kao Kartezijev produkt događaja: izvučene su tri karte karo, ali ne i karo sedam, i događaja da su izvučene dvije sedmice, ali ne i karo sedmica, tj. on se vizualno može prikazati kao Kartezijev produkt ovih vizualno prikazanih događaja  $\boxed{k k k}$  i  $\boxed{7 7}$ . Ta dva događaja ne ovise jedan o drugome te se može primijeniti princip produkta. Na isti se način i drugi događaj/skup prikaže kao Kartezijev produkt vizualno prikazanih nezavisnih događaja/skupova:  $\boxed{k k}$ ,  $\boxed{k7}$ ,  $\boxed{7}$  i  $\boxed{x}$ , te se primijeni princip produkta.

**Ključne riječi:** princip prebrojavanja, princip produkta, princip sume

**Literatura:**

1. Jankov-Marišević, D., Mikić, M. (2019): Kombinatorika i vjerojatnost – zajedno kroz ples, Osječki matematički list, br. 99, str. 123-136
2. Scitovcki, R., Galić, R., Šilac-Benšić, M. (1993): Numerička analiza – Vjerojatnost i statistika, Elektrotehnički fakultet Osijek, Osijek
3. Veljan, D. (2001): Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, Zagreb

## P(R)OUČAVANJE GEOMETRIJE U SREDNJOJ ŠKOLI

Vlatka Hižman-Tržić

[vlatka.hizman-trzic@skole.hr](mailto:vlatka.hizman-trzic@skole.hr)

Tehnička škola Virovitica

### Prošireni sažetak

U svojoj dugogodišnjoj nastavnoj praksi uočila sam da je geometrija većem dijelu učenika dio matematike koji najmanje vole i razumiju (posebice se to odnosi na stereometriju). Osim toga, učenici u srednju školu uglavnom dolaze sa slabom usvojenosti temeljnih koncepata geometrije kao što su površina i obujam, imaju miskoncepcije o ovim pojmovima te se bore s terminologijom. Ovu tezu potkrepljujem situacijom u prvom razredu pred inicijalni ispit (ali i kasnije), kada na moj upit kako izračunati površinu trokuta u svakoj generaciji nekoliko učenika kaže da treba pomnožiti duljine svih triju stranica trokuta. Skicirati kvadar za više učenika u inicijalnom ispitu znači nacrtati pravokutnik.

Kako pomoći učenicima usvojiti osnovne geometrijske pojmove i koncepte te „razbiti“ njihove miskoncepcije u geometriji? To je pitanje mučilo i supružnike Van Hiele koji su 50-ih godina prošloga stoljeća pokušavali otkriti razloge lošeg uspjeha u učenju geometrije i doći do konkretnih metoda kojima bi takvo stanje popravili. Po njihovoj teoriji učenje geometrije bit će djelotvorno ako su učenici aktivno uključeni u istraživanje geometrijskih objekata u ravnini i prostoru te iznose vlastita opažanja o obliku, svojstvima i vezama koje su uočili.

U svome poučavanju geometrije prvo polazim od predznanja učenika. Zato učenicima iz uvoda vizualiziram kako [površinu trokuta](#) (GGB Š. Šuljić) mogu izračunati poznavajući „samo“ površinu pravokutnika (a množenjem triju duljina dobit ćemo obujam). Inzistiram na preciznom definiranju i razlikovanju geometrijskih likova te prepoznavanju i primjeni njihovih svojstava u problemskim zadacima. Ne propustim navesti učenike na provođenje jednostavnijih dokaza, npr. [zbroj unutrašnjih kutova trokuta](#) (GGB D. Belavić), Euklidovog poučka o katetama i visini u pravokutnom trokutu, sinusovog i kosinusovog poučka.

U sljedećim ću primjerima pokazati kako svojim učenicima geometriju pokušavam učiniti zornom (modeli i primjena GeoGebre u radnim listićima za učenike [Poliedri RM](#) i [Stožac RM](#)), razumljivijom (*scaffolding* u rješavanju 2D i 3D problema), zanimljivom i kreativnom (eTwinning projekti [Vizualna matematika](#), [Math Travellers](#), [G.A.M.E.](#), [S.T.A.R.T](#)) te primjenjivom ([Eratostenov eksperiment](#), [eBook Stereometrija](#)).

U poučavanju geometrije treba slijediti promišljanja Van Hieleovih i učenike dobro osmišljenim aktivnostima poticati da izrađuju, skiciraju, predviđaju, interpretiraju, uspostavljaju veze među različitim zapisima što ih, uz nužnu sistematičnost zapisa, dovodi do uspjeha u rješavanju geometrijskih problema i usvajanju planiranih ishoda.

**Ključne riječi:** geometrija, Van Hieleova teorija, radni listići, scaffolding, eTwinning projekti

**Literatura:**

1. Baranović, N. (2019): O učenju i poučavanju geometrije prema Van Hieleovoj teoriji, Geometrija u nastavi matematike, zbornik radova 11. stručno-metodičkog skupa, Pula 2019. str. 19-41
2. Dijanić, Ž. (2017): Scaffolding u nastavi matematike, Matematika i škola br. 91, listopad 2017.
3. Romano, D.A. (2009): Van Hieleova teorija o učenju u geometriji, Metodički obzori 4, str. 95-103, dostupno na <https://hrcak.srce.hr/file/70735> (1. 4. 2024.)
4. <https://repository.math.uniri.hr/en/islandora/object/mathri%3A148/datastream/PDF/view> (1. 4. 2024.)
5. <https://www.mathos.unios.hr/~mdjunic/uploads/diplomski/PAV117.pdf> (1. 4. 2024.)

## STATISTIČKI BIJEG

**Jelena Horvat, Mateja Šafarić Novak**

[jelena1144@gmail.com](mailto:jelena1144@gmail.com), [mateja565@gmail.com](mailto:mateja565@gmail.com)

Tehnička škola Čakovec

### Prošireni sažetak

George Bernard Shaw, irski književnik, rekao je: „Nismo se prestali igrati jer smo odrasli; odrasli smo jer smo se prestali igrati.“ *Escape room* timska je igra u kojoj u tematski uređenoj prostoriji grupa igrača treba riješiti određene zadatke, mozgalice, zagonetke, pronaći ključeve, šifre, otključati lokote te izaći iz prostorije.

Prema Kurikulumu za nastavni predmet Matematika za srednje škole, odgojno-obrazovni ciljevi učenja i poučavanja matematike su, između ostalog, samostalno i u suradničkom okruženju matematički rasuđivati logičkim, kreativnim i kritičkim promišljanjem te povezivanjem, argumentiranim raspravama, zaključivanjem, provjeravanjem pretpostavki i postupaka te dokazivanjem tvrdnji, rješavati problemske situacije odabirom relevantnih podataka, analizom mogućih strategija i provođenjem optimalne strategije te preispitivanjem procesa i rezultata, po potrebi uz učinkovitu uporabu odgovarajućih alata i tehnologije, razviti samopouzdanje i svijest o vlastitim matematičkim sposobnostima, upornost, poduzetnost, odgovornost, uvažavanje i pozitivan odnos prema matematici i radu općenito.

Kako se kroz igru najbolje uči, vjerojatnost i statistiku, područja matematike koja se u školama obrađuju uglavnom pred kraj nastavne godine, probale smo obraditi upravo igrajući *Escape room*. U prvom dijelu radionice bit će predstavljena ideja izrade *Escape rooma*. Odabrani zadatci pokrivaju sve ishode. Učenici trebaju prikupiti podatke, analizirati ih, odabrati relevantne podatke te ih primijeniti u daljnjem tijeku igre. Učenici kroz odabrane zadatke primjenjuju svoje znanje iz vjerojatnosti kako bi došli do rješenja problema.

Od nastavnih pomagala potrebno je nekoliko lokota koji se otključavaju šifrom ili ključem, kovčezi i kutije koji se mogu zaključati, razne knjige, okvir za sliku, kalendar, zidni sat, papirići različitih boja, špil karata, kocke, set tangrama, mobitel, planer, uređaj za reprodukciju glazbe. Od nastavnih materijala potrebni su nastavni listići sa zagonetkama, rebusima, križaljka i zadatcima, kartice sa slovima, audio-zapis. U drugom dijelu radionice sudionici će biti podijeljeni u timove te će se okušati u igri. Na taj će način dobiti jasniji uvid u igru i povezivanje rješenja problema kako bi došli do konačnog izlaza. Nakon uvida u igru, sudionicima radionice prezentirat ćemo način sastavljanja igre i različite metode ulančavanja zadataka koje kasnije mogu primijeniti u nastavi.

Osim što kroz Escape room učenici primjenjuju ishode iz područja Vjerojatnosti i statistike, učenici kritički razmišljaju, rješavaju probleme, ali i međusobno timski surađuju, komuniciraju i razvijaju upornost, hrabrost i otvorenost u suočavanju s novim i nepoznatim situacijama.

**Ključne riječi:** Escape room, kritičko razmišljanje, rješavanje problema

**Literatura:**

1. Cluebox – edukacijski escape room set, dostupno na <https://cluebox.eu/> (5. 4. 2024.)
2. Kurikulum za nastavni predmet Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2. u Republici Hrvatskoj, dostupno na [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_10\\_209.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_10_209.html) (5. 4. 2024.)
3. Primjeri PISA zadataka, dostupno na <https://pisa.ncvvo.hr/primjeri-pisa-zadataka/> (5. 4. 2024.)

## POUČAVANJE STATISTIKE KROZ GEOGEBRU

**Zvezdana Jurić, Snježana Bošnjak**

[zjuri50@gmail.com](mailto:zjuri50@gmail.com), [bosnjak.snjezana@gmail.com](mailto:bosnjak.snjezana@gmail.com)

Ugostiteljsko-turistička škola, Osijek; Elektrotehnička i prometna škola Osijek

### Prošireni sažetak

Radionica je namijenjena nastavnicima koji žele unaprijediti svoju nastavu korištenjem digitalnog alata GeoGebra na inovativan način. GeoGebra je sveobuhvatan alat koji objedinjuje različite matematičke discipline kao što su geometrija, algebra i statistika. Sudionici će imati priliku vidjeti i isprobati primjere zadataka iz područja statistike. Kroz interaktivne aplete omogućuje se korisnicima istraživanje matematičkih pojmova na dinamičan način, koji doprinosi vizualizaciji, obradi i analizi podataka, što dovodi do boljih rezultata u procesu učenja.

Tijekom radionice, nastavnici će imati priliku isprobati tri različite kategorije zadataka. Prvi skup zadataka usmjeren je na zahtjeve koji od učenika traže da prikažu informacije na različite vizualne načine. Druga kategorija obuhvaća zadatke u kojima učenik istražuje pojmove koji su potrebni za analizu podataka. Treća kategorija zadataka usmjerena je na vježbe u kojima učenik može provjeriti razinu razumijevanja osnovnih koncepata za analizu podataka.

U prvoj skupini nastavnicima će biti predstavljene razne aktivnosti koje uključuju prikazivanje podataka kroz različite vrste grafikona poput stupčastih, kružnih, linijskih, stablo-lista i histograma. Učenicima se nudi vježba prikaza podataka na apletima izrađenim u GeoGebri. Za svaki zadatak pri rješavanju učenik dobije povratnu informaciju o tome koliko je uspješno izvršio zadatak, što omogućuje samoprocjenu svog napretka u radu. Istovremeno, nastavnik dobije informaciju o napretku svojih učenika i može odlučiti treba li im dodatna podrška ili pomoć u radu.

Druga skupina zadataka usredotočena je na istraživanje srednjih vrijednosti i disperzije podataka, poput aritmetičke sredine, moda, medijana, kvartila, varijance i standardne devijacije. Učenici ove pojmove istražuju kroz aktivnosti koje uključuju prilagodbu ukupnog broja podataka ili mijenjanje samih podataka. Nakon istraživanja, učenik zapisuje svoje zaključke unutar same aktivnosti. Na ovaj se način pomoću interaktivnih aktivnosti učeniku nudi bolje razumijevanje navedenih koncepata o podacima i kako da ih primijene u analizi podataka.

Treća skupina aktivnosti osmišljena je tako da učenici uvježbaju zadatke iz analize podataka, posebno se fokusirajući na koncepte koje su prethodno istraživali. Kada učenici svladaju osnovne koncepte, mogu za grafički prikaz koristiti brkату kutiju koja pruža slikovni prikaz središnjih vrijednosti i prisutnosti neobičnih vrijednosti. Učenik pri rješavanju ove

skupine zadataka također dobije trenutnu povratnu informaciju o uspješnosti u rješavanju zadataka. Na taj način učenik ima uvid u vlastiti napredak i dublje razumije navedene pojmove.

Učenici koji rade na ovakav način mogu imati koristi u vidu povećane angažiranosti, boljeg razumijevanja matematičkih pojmova za vizualizaciju ili prikaz podataka, razvoja kritičkog razmišljanja, individualiziranog učenja te pripreme za digitalno doba. Radionica će pružiti dublje razumijevanje primjene GeoGebra alata u poučavanju matematike, posebno u području analize podataka, te će sudionicima omogućiti da steknu nove vještine i metode koje mogu primijeniti u svojoj nastavnoj praksi.

Cilj radionice je ponuditi sudionicima drugačiji pristup u obradi teme *Podatci* kako bi se učenicima olakšalo razumijevanje i primjena matematičkih koncepata vezanih uz podatke. Takav način može rezultirati poboljšanjem kvalitete nastave i učenja u matematičkom području. Uz takav pristup obrade teme *Podatci* ova radionica osigurava i bolju pripremu nastavnika za suvremeno digitalno doba jer potiče korištenje tehnoloških alata kako bi se poboljšao proces učenja i pri tome ostvarili bolji rezultati kod učenika.

**Ključne riječi:** analiza podataka, GeoGebra, prikaz podataka

**Literatura:**

1. C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, Teaching statistics in school mathematics - Challenges for teaching and teacher education, Springer, 2011.
2. G. W. Cobb, D. S. Moore, Mathematics, statistics, and teaching, Mathematical association of America, 2010.
3. <https://www.geogebra.org/m/hgn6arfa> (25.3.2024. - Prikaz podataka)
4. <https://www.geogebra.org/m/edfrv8et> (25.3.2024. - Analiza podataka)



## HOĆEMO LI ZAUZDATI UMJETNU INTELIGENCIJU ILI ĆE ONA ZAUZDATI NAS?

**Josip Kličinović, prof.**

[josip.klicinovic@skole.hr](mailto:josip.klicinovic@skole.hr)

Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb

### Prošireni sažetak

Pojam umjetne inteligencije nije nov – star je 70-ak godina, ali je u posljednjih 15-ak doživio uspon koji je posljednjih nekoliko godina strelovit. Prirodno se među učiteljima pojavila bojazan – hoće li nas umjetna inteligencija zamijeniti? Ili je pak možemo zauzdati i iskoristiti u našu svrhu?

Sve više znanstvenika govori o implikacijama korištenja umjetne inteligencije u nastavi, donose svojevrzne zahtjeve i postavljaju smjernice koje škole moraju provoditi u eri umjetne inteligencije. Govore o reformaciji nastavnog procesa u eri umjetne inteligencije.

Rezultat upita umjetnoj inteligenciji ne smije se shvatiti kao konačan proizvod, kao određenu točku, već kao početak planiranja. A prije toga je potrebno dobro razmisliti o svrhovitosti korištenja u danom trenutku. U konačnici, nastavnici imaju autonomiju (do određene mjere) u svojoj učionici, ali osmišljavanje raznih materijala za učenike, a onda još i diferencirati za različite skupine učenika, mukotrpan je posao.

Osim nastavnika, potrebno je i učenike dobro poučiti kako koristiti umjetnu inteligenciju. Ne kako bi varali na ispitima ili tražili prečace, već kako bi je koristili kao alat za učenje.

Ova radionica fokusirana je na etičnost korištenja alata umjetne inteligencije, kao i na zadavanje efikasnih upita kako bi se dobili najbolji mogući rezultati.

Na radionici će se razgovarati o etičnosti korištenja, iznijet će se primjeri (dobre) prakse te proći dva besplatna alata koja mogu pomoći učiteljima: ChatGPT (inačica 3.5) i MagicSchool. Polaznici će na kraju radionice moći iznijeti svoje ideje efikasnog upita, prokomentirati načine korištenja, izraditi nastavni plan, interaktivni uvod u nastavno gradivo, pitanja višestrukog odgovora, zadatke izrađene po Webbovoj taksonomiji (Depth Of Knowledge) te kreiranje rubrika.

**Ključne riječi:** umjetna inteligencija, ChatGPT, MagicSchool



## STARE VRIJEDNOSTI U NOVOJ NASTAVI

**Biserka Kolarec**

[bkudelic@agr.hr](mailto:bkudelic@agr.hr)

Sveučilište u Zagrebu, Agronomski fakultet

### Prošireni sažetak

Tko od nas nije čuo komentare poput ovih: *Matematika je teška, Ja to ne razumijem, Zašto to učimo?, Čemu to služi?, ...?* Tko nije susreo nekog osnovnoškolca ili srednjoškolca koji obeshrabren dolazi tražiti pomoć na instrukcijama? Tko se nije osvjedočio o malodušnosti takvih? I sa stručnog i s ljudskog gledišta postojeće stanje treba mijenjati. Cilj je ovog izlaganja ukazati na probleme, identificirati im uzroke i dati prijedloge njihova rješavanja.

Brojna istraživanja u svijetu i kod nas (Vidić i dr., 2020) ukazuju na postojanje straha od matematike. Strah koči razmišljanje, negativne misli smanjuju radnu memoriju pa učenici postižu rezultate ispod svojih mogućnosti, naročito na testu. Potom loš rezultat učvršćuje negativne misli koje pojačavaju strah, i tako se spirala obeshrabrenja nastavlja. Sve rezultira gubitkom interesa za predmet i lošom slikom o sebi. Međutim, matematika nije život, vrijednost čovjeka ne leži u njegovu školskom uspjehu ni iz kojeg predmeta, pa tako ni iz matematike.

Nekome tko voli matematiku (a takvi su nastavnici matematike) i smatra je lijepom, korisnom i lakom, nije se lako uživjeti u stanje onoga tko misli drukčije. Teško se penjati ljestvama na kojima nedostaju prečke: dio težine matematike može se pripisati povezanosti i nadovezivanju sadržaja pa propušteno i nesvladano čini poteškoće. Upravo zbog toga velik je problem metodička nedorečenost udžbenika matematike na svim razinama školovanja, što je činjenica koju kanimo potkrijepiti dokazima. Problem je i u didaktici poučavanja. Prilagođavamo li pristupe i metode poučavanja učenicima? Uvriježena je isprika da za to nema vremena u pretrpanom kurikulumu. Što kad bi nastavniku u tome pomogli upravo udžbenici?

U izlaganju kanimo dati usporedbu klasične i programski strukturirane nastavne jedinice i argumentirati njihovu različitost ne samo u sadržaju, već i u samom pristupu poučavanju. Kad nastavnici jednom uvide manjkavost postojećih udžbenika i zatraže/napišu bolje, kad stare didaktičke koncepte usmjerene prema poučavanju i nastavniku zamijene onima usmjerenima prema učeniku i procesu učenja, problem straha od matematike bit će znatno ublažen.

**Ključne riječi:** poučavanje matematike, strah od matematike, programirani udžbenici

**Literatura:**

1. Kadum, V., Ljubković, J. (2001): Programirani udžbenici za matematiku. Njihova struktura i dosadašnja iskustva u njihovom sastavljanju i primjeni// Uloga udžbenika u matematičkom odgajanju i obrazovanju učenika osnovne i srednje škole: zbornik radova, Kadum V., ur. , Pula, IGSA, HMD, Podružnica Istra, str. 108-122
2. Vidić, T., Smetko, S., Maričić, A. (2020): Strah od matematike učenika u osnovnoj školi, Napredak 161 (3-4), str. 203-219

## STVARAMO VJEŠTINE 21. STOLJEĆA

**Biljana Kuhar, prof. savjetnik**

[biljana.kuhar@skole.hr](mailto:biljana.kuhar@skole.hr)

Elektrotehnička škola

### Prošireni sažetak

U suvremenom obrazovanju, prilagodba kurikuluma ključna je za pripremu učenika za izazove budućnosti. Međutim, manje zastupljene grane matematike, poput geometrije, kombinatorike i statistike, često su potisnute u korist aritmetike i algebre. Ovaj članak istražuje važnost isticanja ovih područja u obrazovnom kontekstu te provodi anketu među učenicima kako bi se dobili korisni uvidi.

Geometrija, kombinatorika i statistika godinama su bile nedovoljno zastupljene u mnogim matematičkim kurikulumima. Iako su temeljne za razvoj apstraktnog mišljenja i rješavanje problema, često su bile potisnute u korist aritmetike i algebre. No, nedavno se primjećuje povećani interes za kombinatoriku, posebno teoriju grafova, zbog njezine sve veće primjene u raznim industrijama.

Statistika, s druge strane, tek nedavno je dobila značaj u obrazovanju. S razvojem tehnologije i rastućom primjenom analize podataka, strojnog učenja i umjetne inteligencije, statistika postaje ključna za razumijevanje suvremenog društva.

Nedostatak resursa i percepcija manje važnosti ovih grana matematike glavni su razlozi njihova nekadašnjeg nedostatka u kurikulumima. Geometrija zahtijeva apstraktno razmišljanje, dok kombinatorika razvija vještine logičkog zaključivanja. Statistika je ključna za interpretaciju podataka i donošenje informiranih odluka.

Istraživanje među učenicima rađeno je na temelju nekih od pitanja: Kako biste ocijenili svoje razumijevanje geometrije, kombinatorike i statistike u usporedbi s drugim matematičkim temama? Koje ste konkretne primjere iz stvarnog života upoznali u nastavi geometrije, kombinatorike i statistike? Smatrate li da je vaša nastava više usmjerena na aritmetiku i algebru ili na druge grane matematike poput geometrije, kombinatorike i statistike? Koje vještine smatrate najvažnijima za uspješno suočavanje s izazovima u STEM područjima?

Stavljanje naglaska na ova područja matematike može pozitivno utjecati na razvoj kritičkog mišljenja, problem-solving vještina i pripremu učenika za budućnost. Učenici koji su izloženi ovim disciplinama imaju veću vjerojatnost da razviju interes za STEM područja i nastave studirati matematiku na višoj razini.

**Ključne riječi:** geometrija, kombinatorika, statistika

**Literatura:**

1. A. P. Samaras, Children's Computers. Childhood Education, 72 (3),
2. S. Calvert, S., Children's Journeys through the Information Age. Boston: Mc Graw-Hill, 1999.
3. <https://www.khanacademy.org/math/probability>
4. <https://www.khanacademy.org/science/optics-essentials/x0484cce4552ac2a3:how-do-rainbows-and-halos-form-in-the-sky/x0484cce4552ac2a3:how-do-rainbows-and-halos-form/e/geometry-of-prism>
5. <https://www.khanacademy.org/math/precalculus/x9e81a4f98389efdf:prob-comb>

## MATEMATIKA IZ BAKINE ŠKRINJE

Dijana Ligutić, Marina Kukoč

[dijana.ligutic@skole.hr](mailto:dijana.ligutic@skole.hr) , [marina.kukoc@skole.hr](mailto:marina.kukoc@skole.hr)

1. gimnazija Split

### Prošireni sažetak

U našoj školi, 1. gimnaziji Split, djeluje klub „Opleti“ koji okuplja dvadesetak učenika zainteresiranih za kukičanje. Vodimo ga nas četiri nastavnice i zajedno s učenicima kukičanim motivima obilježavamo razne prigode.

Budući da smo nas dvije matematičarke, naravno da smo i u ovome vidjele matematiku i malo-pomalo počele učenicima ukazivati na tu vezu. Istraživanjem, uočavali smo sve više matematičkih koncepata koji se mogu predočiti kukičanim modelima.

U ovom priopćenju pokazat ćemo neke veze matematike i kukičanja. Prikazat ćemo stvaranje oblika različitih zakrivljenosti ovisno o tome na koji način kukičanjem povećavamo broj očica u svakom sljedećem retku. Pokazat ćemo kako kukičati krug, kuglu ili hiperboličku površinu. Također, pokazat ćemo kako matematički odrediti uzorak za savršenu kuglu. Povezat ćemo kukičanje i eksponencijalni rast. Na kukičanim modelima euklidske, sferne i hiperboličke ravnine istaknut ćemo trokute i paralelne pravce. Donijet ćemo oblike koje smo kukičale zajedno s učenicima, kao što su sferni i hiperbolički oblici, Seifertova ploha...kako bi ih zainteresirani mogli i uživo vidjeti.

Iako u novije vrijeme, naravno, imamo modernijih načina na koje možemo prikazati razne geometrijske oblike, smatramo, a i uvjerile smo se u to, da ovaj 'stari' način učenike ispunjava ponosom kad vide rezultat rada svojih ruku, ujedno razvija strpljenje, motoriku i kreativnost. Što je jako važno, vide da se matematika nalazi svuda oko nas, čak i tamo gdje se najmanje nadaju.

Nadamo se da ćemo ovim priopćenjem nekima dati ideju da pokušaju sa svojim učenicima na ovaj način spojiti kreativnost i matematiku.

Za one zainteresirane za kukičanje hiperboličkih oblika pripremili smo radionicu.

**Ključne riječi:** hiperboličke površine, matematičko kukičanje

**Literatura:**

1. Pugar, Ana (2014.): Vizualizacija i povijest hiperboličke geometrije, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, PMF Zagreb  
Preuzeto s <https://zir.nsk.hr/islandora/object/pmf%3A5418>
2. <https://hyperbolic-crochet.blogspot.com/2012/07/my-tedxriga-talk-transcribed-full.html> (2. 4. 2024.)
3. <https://theiff.org/current/> (2. 4. 2024.)
4. <https://theunknownorchard.blogspot.com/2015/08/understanding-spherical-crochet-and.html>



## KUKICOM KROZ MATEMATIKU

**Dijana Ligutić, Marina Kukoč**

[dijana.ligutic@skole.hr](mailto:dijana.ligutic@skole.hr), [marina.kukoc@skole.hr](mailto:marina.kukoc@skole.hr)

1. gimnazija Split

### Prošireni sažetak

Kad se spomene kukičanje, vjerojatno većina ljudi pomisli na nešto staro: bake, čipke, stolnjake, ... a ne na matematiku. Kukičanjem se vježba strpljenje, motorika, a i koncentracija jer za neke uzorke treba pažljivo brojiti, misliti na vrstu bodova i boje. Ujedno i opušta i pruža zadovoljstvo i ponos kad vidimo rezultat rada naših ruku.

Kukičanje možemo na razne načine povezati s matematikom, počevši od brojenja, preko stvaranja uzoraka do kukičanja matematičkih oblika.

Na ovoj radionici zadržat ćemo se na hiperboličkim oblicima. Za kukičanje nam je potrebna igla, tzv. kukica ili heklica, te vuna. Ovisno o predznanju sudionika, najprije ćemo demonstrirati osnovne bodove kukičanja, tj. sudionici će naučiti kako se kukiča lančić te niski, poluisoki i visoki štapić. Nakon toga svaki će sudionik izabrati vunu i uz našu pomoć i podršku kukičati hiperbolički oblik. On se dobiva tako da u svakom sljedećem redu povećavamo broj očica na način da u svakoj očici prethodnog reda napravimo dva štapića, ili u svakoj drugoj očici, ili u svakoj trećoj... bitno je da omjer kojim započnemo ostane do kraja isti. Kako dodajemo štapiće, tako površina više ne ostaje ravna nego se kovrča, i to više što češće dodajemo očice. Na radionicu ćemo donijeti modele kukičane u raznim omjerima pa će sudionici odlučiti u kojem će omjeru kukičati.

(Radionica bi trebala biti za do 15 sudionika, kako bismo stigle sve popratiti. Materijale, kukice, vunu i škare donijet ćemo sa sobom.)

Na kraju radionice sudionici će jedni drugima pokazati svoje radove koje će ponijeti kući. Nadamo se da će im biti zanimljiv spoj tradicionalnog i matematike, da će se opustiti i dobiti inspiraciju za samostalno eksperimentiranje s debljinom vune, bojama i oblicima.

**Ključne riječi:** hiperboličke površine, matematičko kukičanje

**Literatura:**

1. <https://hyperbolic-crochet.blogspot.com/2012/07/my-tedxriga-talk-transcribed-full.html>
2. <https://mathandfiber.wordpress.com/2012/03/17/homework-instructions/> (2. 4. 2024.)
3. <https://paula.rizzuto.id.au/hyperbolic-plane-crochet-model/> (2. 4. 2024.)

## POTRESNA MATEMATIKA

Ivana Martinić

[ivana.martinic@skole.hr](mailto:ivana.martinic@skole.hr)

V. gimnazija, Zagreb

### Prošireni sažetak

Već treću godinu u V. gimnaziji u Zagrebu provodimo fakultativnu nastavu Geofizike, s naglaskom na Seizmologiju i Meteorologiju, a s ciljem da populariziramo geofizičke znanosti i ponudimo učenicima nove sadržaje iz prirodoslovlja. Svakako je jedna od motivacija za uvođenje predmeta bila i potresna aktivnost u Zagrebu 2020. godine te važnost edukacije učenika i razbijanja miskoncepcija o potresima. U razradi kurikuluma sudjelovali su profesori s Geofizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, a osim klasične nastave u učionici, učenici svake godine sudjeluju na terenskim nastavama i tako proširuju svoja znanja i kompetencije.

Cilj je ovog rada prikazati gdje se srednjoškolska matematika može pronaći u seizmologiji, ali i obratno, kako osnovne koncepte iz seizmologije uvesti u nastavu matematike i kroz interdisciplinarnost ukazati na važnost i ulogu matematike u prirodnim znanostima. Poseban je naglasak na osvještavanju uloge seizmologa u razumijevanju procesa koji se odvijaju u Zemljinoj unutrašnjosti i osmišljavanju metoda kojima mogu izmjeriti i detektirati sastav i promjene u slojevima Zemlje. Slično kako zvučni valovi prilikom ultrazvuka daju sliku ljudskog tijela, tako seizmički valovi daju sliku Zemljine unutrašnjosti, a razumijevanje njihova širenja izvrsna je prilika za davanje konteksta trigonometrijskim funkcijama i uvođenje u tematiku potresa.

U izlaganju ću ukratko predstaviti nekoliko aktivnosti koje se u nastavi matematike mogu provoditi u različitim nastavnim cjelinama u 3. razredu srednje škole: *trigonometrijske funkcije* (širenje seizmičkih valova), *logaritamska funkcija* (magnituda potresa), *pravac* (određivanje polumjera vanjske jezgre Zemlje i empirijski zakoni o učestalosti potresa).

Naglasak će biti na aktivnosti određivanja polumjera vanjske jezgre Zemlje. Učenici započinju svoje istraživanje hipotezom da je Zemljina unutrašnjost homogena i da se seizmički valovi šire konstantnim brzinama i u ravnim linijama, a potom analizom zbirke seizmograma za isti potres uspoređuju stvarne podatke s teorijskim modelom. Na kraju zaključuju da su seizmički valovi na svojem putu naišli na prepreku – Zemljinu jezgru i da unutrašnjost ne može biti homogena. Crtanjem tangenti i primjenom proporcionalnosti određuju polumjer vanjske jezgre i dolaze do zaključka da je vanjska jezgra u tekućem, a plašt u krutom stanju.

Osim što aktivnost daje učenicima priliku da se zapitaju i promisle kako znamo što je tamo gdje ne možemo direktno pogledati, daje im mogućnost da sudjeluju u provedbi znanstvene metode – od postavljanja hipoteze i njenog testiranja do konačnog opovrgavanja i donošenja zaključaka. Pritom svjedoče kako je seizmologija moćan alat za razumijevanje procesa koji se odvijaju u Zemljinoj unutrašnjosti.

**Ključne riječi:** trigonometrijske funkcije, potresi, seizmički valovi

**Literatura:**

1. [https://www.iris.edu/app/station\\_monitor/](https://www.iris.edu/app/station_monitor/)
2. [file:///C:/Users/imart/Downloads/bogdanovic\\_patricia\\_pmf\\_2014\\_diplo\\_sveuc.pdf](file:///C:/Users/imart/Downloads/bogdanovic_patricia_pmf_2014_diplo_sveuc.pdf)
3. [https://www.iris.edu/hq/inclass/lesson/determining\\_and\\_measuring\\_earths\\_layered\\_interior](https://www.iris.edu/hq/inclass/lesson/determining_and_measuring_earths_layered_interior)
4. <https://supercomputingchallenge.org/18-19/finalreports/32/What%20is%20the%20Radius%20of%20the%20Earth's%20Core-1.pdf>
5. [https://www.sciencebuddies.org/science-fair-projects/project-ideas/Geo\\_p022/geology/measure-earth-diameter-seismic-waves](https://www.sciencebuddies.org/science-fair-projects/project-ideas/Geo_p022/geology/measure-earth-diameter-seismic-waves)

## KUPITI IPHONE ILI DIONICU APPLEA

**Toni Milun, Ivana Car Jakovljević, Karlo Gudić**

[toni@tonimilun.com](mailto:toni@tonimilun.com), [ivanacar72@gmail.com](mailto:ivanacar72@gmail.com), [kgudic@algebra.hr](mailto:kgudic@algebra.hr)

Sveučilište Algebra, Klasična gimnazija, Sveučilište Algebra

### Prošireni sažetak

Koliko bismo zaradili da smo umjesto redovite kupovine novog iPhonea, novac uložili u dionice Applea ili u investicijski fond koji ulaže u fond koji prati indeks S&P 500? Ulaganje u dionice i fondove mnogi u Hrvatskoj smatraju špekulacijom i zbog toga nisu skloni ulagati. S druge strane iPhone je jedan od najpopularnijih, ali i najskupljih modela mobitela, pa ipak mnogima nije problem izdvojiti nekoliko stotina eura svake godine za novi model.

Jedan od razloga zašto se u Hrvatskoj malo ulaže u dionice i fondove slaba je razina financijske pismenosti, a drugi je krah burze koji se u Hrvatskoj dogodio tijekom 2008., kad su u godinu dana vrijednosti uloga pale za čak 70 % i do danas se nisu oporavile. Mnogi pogrešno misle da se takav krah tržišta kapitala dogodio svugdje u svijetu, a činjenica je da je karakterističan samo za države u kojima je tržište kapitala bilo relativno mlado: Hrvatska, Slovenija, Srbija, Bugarska, Slovačka, itd. Cijene dionica u državama koje su imale razvijeno tržište kapitala vrlo brzo su se oporavile, nastavile rasti i donositi prinos ulagačima.

U ovom radu napraviti će se izračun kolikim bismo iznosom danas raspolagali da smo umjesto kupovine novog iPhonea svake godine, identičan iznos ulagali u kupovinu dionica Applea, a što da smo ulagali u neki fond (ETF) koji bi pratio američki burzovni indeks S&P 500. Indeks S&P 500 prati vrijednost oko 500 najvrjednijih američkih dionica. Svakako želimo naglasiti da ulaganje u američke dionice prije 15-ak godina nama iz Hrvatske nije bilo lako dostupno, ali danas i mi preko raznih investicijskih platformi možemo ulagati i kupovati dionice gotovo svih svjetskih kompanija.

Rezultat analize pokazuje da bismo, ulažući novac u dionice Applea umjesto kupovine mobitela, danas raspolagali s više od 100.000 eura na investicijskom računu, a ulaganjem u ETF koji prati američki S&P 500, više od 60.000 eura.

Cilj rada je pokazati primjenu eksponencijalne i logaritamske funkcije u izračunu prinosa (zarade) ulaganja. Drugi cilj je povećanje financijske pismenosti tako da se objektivno istaknu plusevi i minusi investiranja u dionice i fondove.

**Ključne riječi:** investiranje, iPhone, S&P 500

**Literatura:**

1. HNB, Hanfa, Ipsos: Mjerenje financijske pismenosti i financijske uključenosti u Hrvatskoj (2023.)  
[https://www.hnb.hr/documents/20182/4362027/hp07062023\\_prezentacija.pdf/2788e7a0-6303-3498-653d-7df647a41d10?t=1686141550141](https://www.hnb.hr/documents/20182/4362027/hp07062023_prezentacija.pdf/2788e7a0-6303-3498-653d-7df647a41d10?t=1686141550141) (1. 4. 2024.)
2. Trading economics: Apple <https://tradingeconomics.com/aapl:us> (27. 3. 2024.)
3. Trading economics: CROBEX <https://tradingeconomics.com/croatia/stock-market> (27. 3. 2024.)
4. Trading economics: S&P 500 [United States - S&P 500 - 2024 Data 2025 Forecast 2007 Historical \(tradingeconomics.com\)](https://tradingeconomics.com/united-states/s-p-500) (27. 3. 2024.)

## MATEMATIKA MESSIJA I RONALDA

**Toni Milun, Marko Stjepan Mirković**

[toni@tonimilun.com](mailto:toni@tonimilun.com), [mmirkov@algebra.hr](mailto:mmirkov@algebra.hr)

Sveučilište Algebra, Sveučilište Algebra

### Prošireni sažetak

Motivirati učenike za matematiku nije lako. Zato može biti korisno povezati matematiku s područjima njihova interesa i tako je učiniti zanimljivijom. Ovaj rad nastao je na inicijativu studenta Marka Stjepana Mirkovića upotrijebiti statističke metode kako bi opisao ono što njega zanima – nogomet, s posebnim naglaskom na dva najpopularnija nogometaša, Lionela Messija i Cristiana Ronalda.

Statistika je već dugo sastavni dio sporta i pomaže objektivno procijeniti kvalitetu igre pojedinih igrača. Praćenje statističkih podataka sportskih natjecanja sve je popularnije, a internetske stranice i aplikacije koje objavljuju podatke sve su temeljitije.

Budući da su karijere Messija i Ronalda na zalasku, lako se mogu analizirati podatci o njihovim brojnim postignućima od samih početaka, njihova uspona do zalaska karijera. Cilj rada je pronaći modele koji bi opisali kretanja broja postignutih golova, asistencija, ključnih dodavanja, uspješnih driblinga, proglašenja igračem utakmice i prosječnih ocjena tijekom sezona. U programu MS Excel za svaku od promatranih veličina analizirana su tri modela: linearni, eksponencijalni i kvadratni, a potom je odabran optimalan koji opisuje kretanje navedene veličine.

Kao i većina karijera sportaša, tako su i Messijevi i Ronaldovi rezultati na terenu tijekom prvih nekoliko godina bilježili rast, potom dosežali vrhunce i na kraju opadanje. Kad se kretanje broja postignutih golova, asistencija itd. tijekom cijele karijere prikažu grafički, uočava se da ih prikladno opisuje kvadratna funkcija.

Ako se izdvoje pojedina razdoblja, npr. razdoblje početka karijere ili kraja karijere, tada se može uočiti da se kretanje veličina može opisati linearnom ili eksponencijalnom funkcijom. Primjeri primjene linearne funkcije su kretanja broja Messijevih i Ronaldovih postignutih golova i asistencija na početku karijere. Primjeri primjene eksponencijalne funkcije su pad broja postignutih golova i asistencija obojice igrača posljednjih godina.

Budući da se primjeri iz rada opisuju funkcijama koje se obrađuju na nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi, vjerujemo da će biti zanimljivi nastavnicima i učenicima. Također se nadamo da će potaknuti učenike da koriste navedene metode i samostalno pronađu modele koji opisuju pojave u području koje njih zanima, poput glazbe (kretanje prodaje albuma ili streaminga omiljenih pjevača), društvenih mreža (analiza broja pratitelja određenog influensera), sporta, itd.

**Ključne riječi:** nogomet, statistika

**Literatura:**

1. Wikipedia: Cristiano Ronaldo [https://en.wikipedia.org/wiki/Cristiano\\_Ronaldo](https://en.wikipedia.org/wiki/Cristiano_Ronaldo) (1. 4. 2024.)
2. Wikipedia: Lionel Messi [https://en.wikipedia.org/wiki/Lionel\\_Messi](https://en.wikipedia.org/wiki/Lionel_Messi) (1. 4. 2024.)



## POUČAVANJE TEORIJE GRAFOVA

dr. sc. Anamari Nakić, izv. prof.

[anamari.nakic@fer.hr](mailto:anamari.nakic@fer.hr)

Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu

### Prošireni sažetak

Povezivanje matematike i inženjerstva s tehnologijom još je jedan od mnogobrojnih zahtjeva koji se stavlja pred suvremenog nastavnika matematike. Da bismo govorili o tehnologiji na nastavi matematike, uopće nam nisu potrebni elektronski uređaji. Nije svima poznato da razvoj tehnologije započinje s papirom i olovkom... i s matematikom. U ovom ćemo radu predstaviti matematičku temu koja se brzo i jednostavno može približiti naprednim i motiviranim srednjoškolcima, a obično se detaljno obrađuje u visokoškolskoj nastavi matematike.

Matematički pojam grafa prirodan je model za razne mreže koje se pojavljuju u svakodnevnicima, bilo da se radi o telekomunikacijskim, električnim ili društvenim. Štoviše, ovaj jednostavan model pogodan je za prikaz bilo kakve vrste odnosa objekata iz fizike, biologije, čak i lingvistike. Graf  $G = (V, E)$  uređeni je par nepraznog konačnog skupa vrhova  $V$  i skupa  $E$  dvočlanih podskupova od  $V$ , koje nazivamo bridovima. U ovom ćemo radu govoriti o poučavanju osnovnih pojmova iz teorije grafova. Predstaviti ćemo i grafički skicirati najpoznatije grafove. Upitat ćemo se koliko ih ima i kako ih razlikujemo. Udubit ćemo se u primjenu grafova u rješavanju svakodnevnih problema kroz primjere i rješenja matematičkih zadataka namijenjenih učenicima srednjih škola. Jedan od ilustrativnih primjera veza je između bojenja grafova i izrade rasporeda maturalnih ispita. Također, grafovi su usko vezani i za teme iz kombinatorike koje se obrađuju u srednjoškolskom programu te uz računalno programiranje.

Sadržaj ovoga rada nastavnici mogu iskoristiti za rad s naprednim učenicima, te za kratko predstavljanje nove matematičke teme kojom će se budući studenti baviti na studijima matematike i računarstva. Smatramo da predstavljena tema i vezani zadatci mogu pomoći u boljem razumijevanju važnosti i primjeni matematike u suvremenom svijetu te za podizanje motivacije naprednih učenika za učenje matematike. Zadatci vezani uz grafove primjereni su za samostalno rekreativno vježbanje matematike, ali i za računalno programiranje. Iskustvo nam pokazuje da su interes i intrinzična motivacija studenata računarskih studijskih programa za proučavanje ove matematičke teme vrlo visoki.

**Ključne riječi:** bojenje grafova, graf

**Literatura:**

1. I. Mihovilović I., Nakić A., Prebrojavanje stabala s malim brojem vrhova, Osječki matematički list 22 (2022), 19–31
2. Nakić A., Vesel I., Problem klasifikacije grafova, Acta Mathematica Spalatensia Series didactica, Vol.3 (2020), 87- 97

## DOKAZ U SREDNJOŠKOLSKOJ MATEMATICI

Josipa Pavlič

[josipa.pavlic@skole.hr](mailto:josipa.pavlic@skole.hr)

Gimnazija Sesvete, Zagreb

### Prošireni sažetak

Bez obzira radi li se o „starim“ ili „novim“ područjima kurikuluma nastave matematike, učenici bi u srednjoj školi trebali razvijati vještine dokazivanja i znati dokazati neke osnovne poučke koje primjenjuju. Prema objavljenim Katalozima za maturu, na ispitima državne mature iz matematike u ovoj se šk. god. mogu očekivati i zadatci u kojima će učenici trebati dokazati neku tvrdnju. Kako se kod učenika nematematičkih gimnazija mogu uočiti velike razlike u motivaciji, usvojenosti matematičkih znanja i vještina, zamjetan je broj onih učenika koji imaju poteškoća s razumijevanjem dokaza, koji rijetko smisljeno argumentiraju i sudjeluju u procesu dokazivanja. To predstavlja velik izazov za nastavnike s obzirom na relativno mali broj sati nastave matematike u našim školama i veliki opseg gradiva predviđenog Kurikulumom.

U ovom će priopćenju biti prikazano nekoliko aktivnosti za nastavu matematike, a koje mogu pridonijeti uključivanju većeg broja učenika u proces dokazivanja i argumentiranja. Jedna od tih aktivnosti je vođeno dokazivanje u kojem učenik samostalno dokazuje ili istražuje pomoću uputa koje je pripremio nastavnik u obliku nastavnog listića i u kojemu se učenika usmjerava specifičnim pitanjima, zadacima ili smjernicama. To je alternativa heurističkom dijalogu koji nastavnik vodi s učenicima kad se frontalno provodi neki dokaz. Također se pokazuje korisnim prikaz dokaza u dva stupca. U tom se prikazu u jednom stupcu zapisuju koraci dokaza tj. niz tvrdnji, dok se u drugom navode njihova obrazloženja. Upravo taj drugi stupac naglašava važnost argumentacije. Sam naziv tzv. „two column proof“ ukazuje na formu dokaza koja kao ideja nije nova, ali ipak nije široko poznata u našim standardima i srednjoškolskim udžbenicima. Slično tome je i dokazivanje pomoću dijagrama. U nekim primjerima bit će prikazani problemski ili istraživački zadatci kojima učenici dolaze do njima novih matematičkih svojstava koje zatim dokazuju.

Aktivnosti i ideje iznesene u priopćenju neće napraviti revolucionarni pomak u nastavi matematike, ali će se njihovim uvođenjem svakako učiniti mali iskorak k aktivnom učenju.

**Ključne riječi:** aktivnost, dokaz

**Literatura:**

1. Kurnik, Z. (2009.): Dedukcija, Matematika i škola, br. 51, str. 5-11
2. Kurnik, Z. (2001.): Dokaz, Matematika i škola, br. 9, str. 149-155
3. [Making Mathematics: Teacher Handbook \(edc.org\)](#) (15. 3. 2024.)

# MOGUĆNOSTI UPORABE HUZITA-JUSTIN TEOREMA U NASTAVI GEOMETRIJE

**Katarina Potaček**

[katarina.potacek@gmail.com](mailto:katarina.potacek@gmail.com)

Profesor matematike u mirovini

## Prošireni sažetak

U sekcijском priopćenju (15 min) govorit ćemo o mogućnosti uporabe Huzita-Justin origami teorema u nastavi geometrije, na primjer kod četiri karakteristične točke trokuta, a to su: ortocentar, težište, središte trokutu upisane kružnice i trokutu opisane kružnice.

U nastavku ćemo opisati kako se origami tehnikom bez uporabe ravnala i šestara konstruira simetrala dužine i simetrala kuta te pomoću njih konstruira središte upisane kružnice, središte opisane kružnice, težište i ortocentar bilo kojega trokuta.

Na radionici (90 min) će sudionici moći naučiti konstruirati središte upisane kružnice, središte opisane kružnice, težište i ortocentar bilo kojega trokuta pomoću HJ teorema i origami tehnika bez uporabe ravnala i šestara.

**Ključne riječi:** Huzita-Justin teorem, četiri karakteristične točke trokuta, origami, simetrala

## Literatura:

1. R.J. Lang, (2003): Origami and geometric constructions, Unpublished manuscript, available at [https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami\\_constructions.pdf](https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf)



## POLA STOLJEĆA RUBIKOVE KOCKE

Sanja Sruk

[sanja.sruk1@gmail.com](mailto:sanja.sruk1@gmail.com)

1. gimnazija, Zagreb

### Prošireni sažetak

Prije točno pola stoljeća, 1974. godine, mađarski arhitekt i izumitelj Ernő Rubik izumio je trodimenzijsku slagalicu koju je nazvao Magična kocka, a kasnije je postala poznata pod nazivom Rubikova kocka. Najveću popularnost imala je u osamdesetim godinama prošloga stoljeća, ali i danas ima svoje poklonike i s više od 450 milijuna prodanih primjeraka postala je najprodavanija slagalica. Od 1982. godine održavaju se svjetska prvenstva u brzini slaganja Rubikove kocke, a trenutni rekord od 3.13 sekundi postigao je u lipnju prošle godine Amerikanac Max Park.

Rubikova kocka sastoji se od 26 manjih kockica: 6 središnjih, 12 bridnih (rubnih) i 8 vršnih. Središnji dio čine tri osi koje se presijecaju u središtu i drže na mjestu šest centralnih kockica. U nastavi matematike možemo je iskoristiti na različite načine. Već u nižim razredima osnovne škole učenici upoznaju geometrijska tijela i prepoznaju vrhove, bridove i strane, te Rubikovom kockom kao modelom možemo učenicima približiti trodimenzijski prostor. Kasnije može poslužiti i kao model za istraživanje volumena kocke i odnosa pravaca i ravnina u prostoru. Također se može koristiti i kao model za učenje razlomaka i postotaka, a u 3. razredu srednje škole može se koristiti u poučavanju kombinatorike. Njome možemo učenike zainteresirati za nastavu matematike, poboljšati prostorni zor i logičko razmišljanje te ih potaknuti na daljnje istraživanje i otkrivanje. Proučavanje Rubikove kocke izazov je kojim se razvija pozitivan odnos prema radu, promišljanje i kreativnost, te jača samopouzdanje i apstraktno razmišljanje.

Koliko ima različitih konfiguracija Rubikove kocke? Kako bismo to izračunali, potrebno je zamisliti da smo kocku rastavili i odrediti koliko ima permutacija vršnih (vidljive tri boje) i rubnih (vidljive dvije boje) kockica. Računanjem se dobije da je ukupan broj mogućih konfiguracija Rubikove kocke bez rastavljanja jednak

$$8! \cdot 3^7 \cdot 0.5 \cdot 12! \cdot 2^{11} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000,$$

što je više od 43 trilijuna. Ipak, dovoljno je samo 20 poteza da se Rubikova kocka iz bilo kojeg položaja dovede u početno stanje (svaka strana u jednoj boji).

Najveća Rubikova kocka visoka je tri metra, a brid najmanje iznosi svega 6 milimetara. Najskuplju Rubikovu kocku izradila je tvrtka Diamond Cutters od 18-karatnog zlata, rubina, smaragda, ametista i dijamanta. Potpuno je funkcionalna, a njena je vrijednost procijenjena na 2.5 milijuna dolara.

**Ključne riječi:** Rubikova kocka, permutacije

**Literatura:**

1. Belošević-Mirt, M.: *Matematičke igre u nastavi matematike*,  
<https://zir.nsk.hr/en/islandora/object/pmf%3A11333/datastream/PDF/view>  
(2. 2. 2024.)
2. Vidov, M.: *Matematika Rubikove kocke*,  
<https://zir.nsk.hr/islandora/object/pmf:9450/datastream/PDF/view> (2. 2. 2024.)



## KARAKTERISTIČNE TOČKE TROKUTA – RADIONICA U GEOGEBRI

**Tatjana Štambuk, Ivana Brozović Horvat**

[stambuk.t@gmail.hr](mailto:stambuk.t@gmail.hr), [ivanabrozovichorvat@gmail.com](mailto:ivanabrozovichorvat@gmail.com)

Ekonomsko-turistička škola Karlovac

### Prošireni sažetak

Učenici srednjih škola susreli su se s karakterističnim točkama trokuta još u osnovnoj školi. Stoga je pred nastavnikom izazov kako obradu tih sadržaja podići na višu razinu, te učenike upoznati s nekim novim znanjima i vještinama.

Ako škola ima informatičku učionicu, učenici mogu ove sadržaje obraditi na računalima, u programu GeoGebra.

GeoGebra je svjetski poznat program dinamičke matematike koji povezuje geometriju, algebru i analizu. Program omogućuje pomicanje i animaciju objekata, pa je zbog toga idealan za konstrukciju karakterističnih točaka trokuta.

Na radionici će polaznici:

- upoznati sučelje programa GeoGebra
- upoznati alate za crtanje točke, pomicanje objekta, simetralu dužine, polovište dužine, simetralu kuta, sjecište objekata
- mijenjati vidljivost objekta, preimenovati objekt
- mijenjati vrstu trokuta s obzirom na vrstu kutova i promatrati položaj karakteristične točke
- konstruirati karakteristične točke trokuta
- konstruirati Eulerov pravac
- spremi dio grafičkog prikaza u Word dokument

Polaznici radionice uvidjet će prednosti korištenja programa GeoGebra. Korištenjem programa dinamičke geometrije postićemo zornost prikaza. Nije potrebno raditi posebnu konstrukciju za šiljastokutan trokut, posebnu za tupokutan, posebnu za šiljastokutan, već se vrsta trokuta može mijenjati pomicanjem vrhova trokuta. Na taj način učenik može lako vidjeti kako se mijenja položaj karakteristične točke. Skrivanjem, odnosno pokazivanjem objekata, učenik lako na istome trokutu konstruira sve karakteristične točke. Mijenjanjem položaja vrhova trokuta učenici lakše mogu uočiti koje se tri karakteristične točke uvijek nalaze na istome pravcu.

Samostalnim ili radom u paru učenici bolje usvajaju ishode, razvijaju samopouzdanje i digitalne kompetencije. Uče međusobno komunicirati, argumentirati svoje tvrdnje i ideje.

Često se dogodi da se učenici koji su na nastavi „duhom“ odsutni, oduševе radom na računalu, te brzo i sigurno obave zadatke.

Nakon ove radionice nastavnici će imati dovoljno znanja da sa svojim učenicima konstruiraju karakteristične točke trokuta u informatičkoj učionici. Nadamo se da će nastavnici koji se nisu već prije susreli s programom GeoGebra početi i samostalno raditi u programu, objavljivati svoje radove na platformi GeoGebratube i koristiti radove drugih autora.

**Ključne riječi:** karakteristične točke trokuta, GeoGebra

## JEDNOM, NE TAKO DAVNO... KONSTRUKCIJE NEKAD I DANAS

Zrinka Tomašković

[tomaskoviczrinka@gmail.com](mailto:tomaskoviczrinka@gmail.com)

Gimnazija Karlovac

### Prošireni sažetak

I najmanji detalj može biti trajna motivacija: često se učenici žale kako je upravo njima, upravo sada, najteže u čitavoj povijesti obrazovanja. Lako je na takav izazov bilo odgovoriti primjerom iz neke stare zbirke, ne treba ići daleko unatrag: u vremenu bez džepnih računala, bez programa dinamičke geometrije, bez pomoći formula; samo naučeno. Svi današnji učenički argumenti padaju na takvu demonstraciju.

Tražanjem zadataka po starim zbirkama pronađeni su brojni primjeri geometrijskih zadataka kakve danas više ne bismo stavili pred svoje učenike. Zahtijevaju vještine argumentacije, analize problema, sintezu kroz korake konstrukcije, ali i finu motoriku i koncentraciju pri izradi crteža. Sve to je i danas uključeno i izrečeno kroz ishode koje učenici ostvaruju u nastavi, ali nekako se sve manje ostvaruje u geometrijskim sadržajima.

Samo kao primjere zadataka navodim sljedeće:

Zadatak 1. Travnjak ima oblik kružnog vijenca. Polumjeri kružnica su  $R = 12\text{ m } 8\text{ dm}$  i  $r = 8\text{ m } 4\text{ dm}$ . Nacrtaj sliku travnjaka u umanjenom mjerilu 1:400. Koliki je 1 m toga mjerila? (lit 1., str. 94. zad. 924.)

Zadatak 2. Ako u vrhovima pravilnog: a) trokuta, b) četverokuta, c) peterokuta konstruiráš tangente na opisanu kružnicu, kakav ćeš lik svaki put dobiti? Konstruiraj sliku za stranicu  $a = 3\text{ cm}$ . (lit. 2., str. 88. zad. 679.)

Zadatak 3. Konstruiraj elipsu ako su joj zadane veličine  $b = 4\text{ cm}$ ,  $e = 3\text{ cm}$ . (lit. 2, str. 101., zad 800.b)

Zadatak 4. Zadana su dva ukrštena pravca  $a$  i  $b$ , i na pravcu  $a$  točka  $A$ . Na pravcu  $a$  treba konstruirati središte one kružnice koja prolazi točkom  $A$  i dira pravac  $b$ . (lit 2., str. 118. zad. 958.)

Zadatak 5. Konstruiraj trokut  $ABC$  kojemu je zadano:  $a, \alpha$  i  $b - c$ . (lit. 3., str. 81. zad. 4.151)

Dio zadataka riješen je na satovima pripreme projektnih zadataka u sklopu teme *Trokut* u prvome razredu, dio u trećem razredu unutar izborne teme *Krivulje drugog reda*. Dio zadataka je riješen u sklopu nastave fakultativnog predmeta Nacrtna geometrija.

Uvjerenja sam da nisu zadatci dio koji je težak; u jednom trenutku odlučili smo manje ih opterećivati, a nije li upravo škola period pripreme za teret života?

Kroz svoje izlaganje napravit ću povijesni pregled zadataka iz nekadašnjih osnovnoškolskih i srednjoškolskih udžbenika koji bi mogli potaknuti sadašnje srednjoškolce na usvajanje ishoda u trenutnom srednjoškolskom kurikulumu.

**Ključne riječi:** konstrukcije, geometrija, analiza, sinteza

**Literatura:**

1. Schmid, V. (1971.): Zbirka zadataka iz matematike s uputama i rješenjima za peti razred osnovne škole, Školska knjiga, Zagreb.
2. Schmid, V. (1973.): Zbirka zadataka iz matematike s uputama i rješenjima za sedmi razred osnovne škole, Školska knjiga, Zagreb.
3. Đurović, J., Đurović, I., Rukavina, S. (1997.): Matematika 1, zbirka zadataka za 1. razred gimnazije, Element, Zagreb.
4. [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_146.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html) - kurikulum predmeta matematika (8. 4. 2024.)
5. <https://elematika.hr/> - digitalne verzije udžbenika (8. 4. 2024.)
6. <https://www.e-sfera.hr/> - digitalne verzije udžbenika (8. 4. 2024.)

## BUFFONOV POKUS

Ante Toni Vrdoljak, Marija Vrdoljak

[atvrdoljak@gmail.com](mailto:atvrdoljak@gmail.com), [marija.vrdoljak9@skole.hr](mailto:marija.vrdoljak9@skole.hr)

Centar izvrsnosti iz matematike Splitsko-dalmatinske županije

### Prošireni sažetak

Vjerojatnost i statistika važne su matematičke discipline koje imaju primjene u svakodnevnom životu, znanosti, poduzetništvu i mnogim drugim područjima, a njihova integracija u nastavu matematike omogućuje povezivanje s drugim nastavnim predmetima, što obogaćuje razumijevanje i primjenu matematike u različitim kontekstima. U ovom izlaganju opisat ćemo na koji se način vjerojatnosni problem obrađuje s darovitim učenicima koji pohađaju Centar izvrsnosti iz matematike u Splitsko-dalmatinskoj županiji.

Koristeći probabilistički pristup, razmatra se Buffonov problem koji se temelji na vjerojatnosti da igla bačena na podlogu s paralelnim linijama padne na jednu od tih linija. Formulira se matematički model za ovaj problem, gdje se definiraju skupovi događaja s povoljnim ishodom i svi mogući događaji. Izračunavaju se površine tih skupova i određuje se vjerojatnost da igla padne na liniju. U izlaganju će biti iznesen dokaz i matematički postupak koji podupire opisani postupak određivanja geometrijske vjerojatnosti. Kroz ovaj pristup moguće je približno izračunati vrijednost broja  $\pi$  koristeći relativnu frekvenciju povoljnih događaja u odnosu na ukupan broj bacanja igle. Kako se broj bacanja povećava, preciznost procjene vrijednosti broja  $\pi$  raste, što pokazuje da točna vrijednost broja  $\pi$  može biti dosegnuta u beskonačno mnogo bacanja.

Učenici provode eksperiment bacanja šibica na podlogu s paralelnim linijama, s ciljem da prouče koliko će šibica završiti na tim linijama. Nakon bacanja, rezultate svakog pojedinog pokušaja bilježe u Excelov dokument u kojem se računa procjena vrijednosti broja  $\pi$ , a koji se ažurira sa svakim novim unosom. Istovremeno, druga grupa učenika provodi isti eksperiment, ali koristeći simulaciju bacanja šibica u programskom jeziku Python i/ili u alatima poput Geogebre, uz pomoć umjetne inteligencije.

Usljed analize rezultata, učenici uspoređuju dobivene vrijednosti, istražujući razlike i očekivanja koja su nastala između simulacija i stvarnih eksperimenata. Nakon toga, zajedno se bave matematičkim dokazom koristeći trigonometriju i integralni račun kako bi utvrdili matematičku osnovu ovoga fenomena. Ova interaktivna i multidisciplinarna aktivnost potiče učenike na kritičko razmišljanje, timski rad te primjenu matematičkih koncepata u praksi.

S obzirom na važnosti i široku primjenu vjerojatnosti i statistike u različitim područjima života, integracija ovih disciplina u nastavu matematike predstavlja ključni korak k obogaćivanju učenja i primjene matematike. Kroz takav pristup, učenici stječu ne samo

temeljna matematička znanja, već i sposobnosti analize, donošenja odluka te rješavanja problema koji se susreću u stvarnome svijetu. Stoga nastavak istraživanja i razvoj nastavnih metoda koji potiču integraciju vjerojatnosti i statistike s drugim područjima u nastavi matematike može imati značajan pozitivan utjecaj na obrazovanje i pripremu učenika za buduće izazove.

**Ključne riječi:** Buffonov pokus, geometrijska vjerojatnost, broj  $\pi$

**Literatura:**

1. I. N. Bronštejn: Matematički priručnik, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
2. <https://mathworld.wolfram.com/BufonsNeedleProblem.html> (7. 4. 2024.)