MATEMATIČKI KLOKAN 2024.

RJEŠENJA ZADATAKA

S

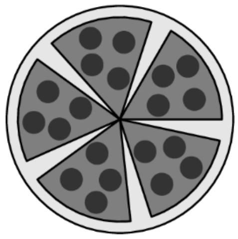
Pitanja za 3 boda:

1. [Ujedinjeno Kraljevstvo] Koji je od zadanih brojeva za dva manji od višekratnika broja 10, za dva veći od potpunog kvadrata i dvostruko veći od prostog broja?

   A) 78 B) 58 C) 38 D) 18 E) 6

   Rješenje: C

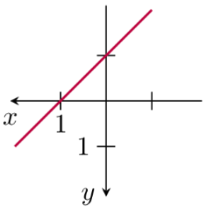
2. [Njemačka] Mladi je klokan razrezao pizzu na šest jednakih dijelova. Pojeo je jednu krišku pa preostale razmjestio tako da između svake dvije bude isti razmak, kao na slici. Koliki je sada kut između dvije kriške pizze?

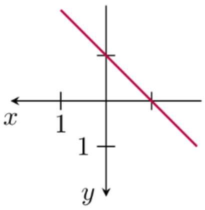
   

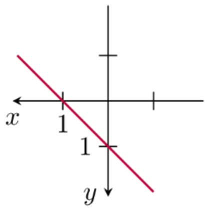
   A) 5° B) 8° C) 9° D) 10° E) 12°

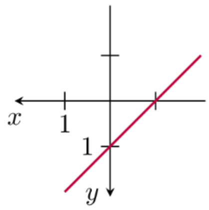
   Rješenje: E
   Zbroj svih pet kutova mjere je $\frac{360°}{6} = 60°$. Stoga je kut između dvije kriške $\frac{60°}{5} = 12°$.

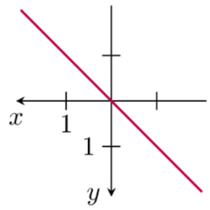
3. [Finska] Josip ima neobičnu naviku crtanja koordinatnog sustava tako da je pozitivan smjer koordinatnih osi lijevo, odnosno dolje. Kako bi izgledao graf funkcije $y = x + 1$ u Josipovu koordinatnom sustavu?

   A)
   

   B)
   

   C)
   

   D)
   

   E)
   

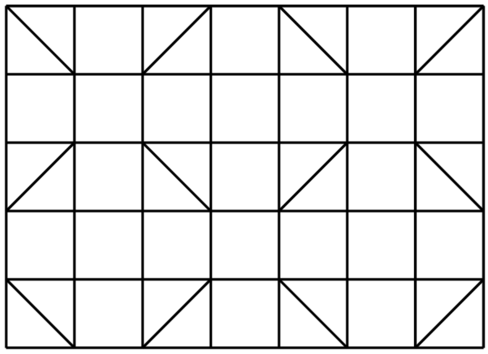
   Rješenje: D

4. [Njemačka] Kata je namjestila igraću kocku tako da su vjerojatnosti dobivanja svakog od brojeva 2, 3, 4 ili 5 još uvijek $\frac{1}{6}$, no vjerojatnost dobivanja broja 6 dvostruko je veća od vjerojatnosti dobivanja broja 1. Kolika je vjerojatnost da se bacanjem Katine igraće kocke dobije 6?

   A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{7}{36}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{5}{18}$

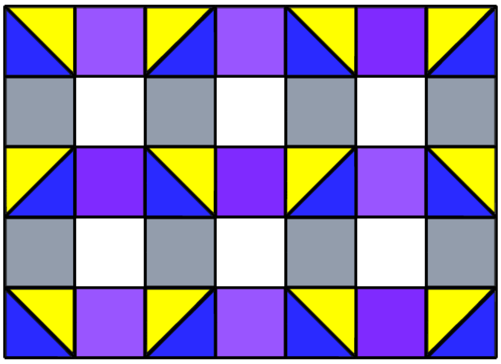
   Rješenje: D
   Vjerojatnost dobivanja broja 1 označimo s $P(1)$, a vjerojatnost dobivanja broja 6 s $P(6)$.
   Vrijedi: $P(1) + P(6) = \frac{2}{6}$ i $P(6) = 2P(1)$. Iz ovog sustava slijedi $P(6) = \frac{2}{9}$.

5. [Finska] Dabar želi obojiti kvadrate i trokute prikazane na slici tako da susjedni likovi budu obojeni različitim bojama (čak i oni kojima je zajednički samo vrh). Koliki je najmanji broj boja koji mu za to treba?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Rješenje: C
Postoje točke koje su zajedničke za 5 likova. Dakle, treba mu najmanje 5 boja. To će biti dovoljno – primjer bojenja s 5 boja je na slici.



6. [Kina] Na stolu je 6 čaša okrenutih otvorom prema gore. U svakom potezu možemo okrenuti točno 4 čaše. Koliko je najmanje poteza potrebno kako bi sve čaše bile okrenute otvorom prema dolje?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

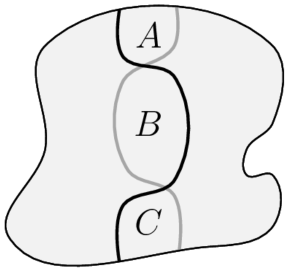
Rješenje: B
Nakon prvog ćemo poteza imati neke 4 čaše okrenute otvorom prema dolje (D) i preostale dvije prema gore (G). Nije moguće u drugom potezu napraviti da sve čaše budu okrenute prema dolje. No, ako DDDDGG u drugom potezu prebacimo u DGGGDG, imat ćemo četiri čaše okrenute prema gore koje ćemo u trećem potezu okrenuti otvorom prema dolje. Odgovor je 3.

7. [Grčka] Martin je počeo s brojem 1 i pomnožio ga sa 6 ili 10. Zatim je rezultat pomnožio sa 6 ili 10. Nastavio je isti postupak. Koji od ponuđenih brojeva Martin nije mogao dobiti svojim postupkom?

A) $2^{100}3^{20}5^{80}$ B) $2^{90}3^{20}5^{80}$ C) $2^{90}3^{20}5^{70}$ D) $2^{110}3^{80}5^{30}$ E) $2^{50}5^{50}$

Rješenje: B
Martin će u svakom potezu imati broj oblika $N = 6^m \cdot 10^n$, gdje su m i n nenegativni cijeli brojevi. Onda je $N = (2 \cdot 3)^m \cdot (2 \cdot 5)^n = 2^{m+n} \cdot 3^m \cdot 5^n$. Primijetimo da je eksponent potencije s bazom 2 jednak zbroju eksponenta potencije s bazom 3 i eksponenta potencije s bazom 5. Od ponuđenih brojeva jedino onaj pod B ne zadovoljava ovaj uvjet.

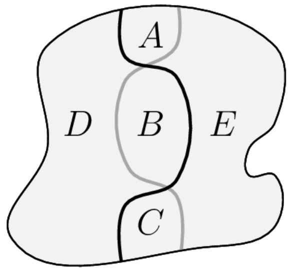
8. [Grčka] Kroz park prolaze crna i siva staza, kao na slici. Svaka staza dijeli park na dva dijela jednake površine. Koja od ponuđenih tvrdnji mora biti točna za površine A, B i C?



A) $A = C$ B) $B = A + C$ C) $B = \frac{1}{2}(A + C)$ D) $B = \frac{2}{3}(A + C)$ E) $B = \frac{3}{5}(A + C)$

Rješenje: B

Svaka staza dijeli park na dva dijela jednake površine. U tom je slučaju površina parka lijevo od crne staze jednaka površini parka lijevo od sive staze, tj. $D + B = D + A + C$, iz čega slijedi $B = A + C$.



Pitanja za 4 boda:

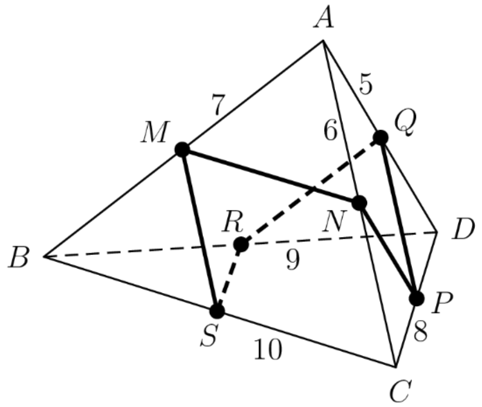
9. [Finska] Točno jedna od ponuđenih tvrdnji o određenom prirodnom broju n je istinita. Koja?

A) n je djeljiv s 3 B) n je djeljiv sa 6 C) n je neparan D) $n = 2$ E) n je prost

Rješenje: C

B ne može biti istinito jer bi onda i A bilo istinito.
D ne može biti istinito jer bi onda i E bilo istinito.
Kako D nije istinito, onda ni E ne može biti istinito jer bi tada i C bilo istinito.
Preostale su nam tvrnje A i C. Ako je A istinita tvrdnja, onda bi C trebala biti lažna, što znači da je n paran, a tada je B istinito.
Preostala nam je tvrdnja C – n je neparan broj koji nije djeljiv s 3 niti je prost, npr. 25.

10. [Grčka] Trostrana piramida $ABCD$ ima bridove duljina 5, 6, 7, 8, 9 i 10. Točke M, N, P, Q, R i S polovišta su bridova piramide, kao na slici. Kolika je duljina zatvorene izlomljene linije $MNPQRSM$?



A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

Rješenje: C

Dana linija sastoji se od srednjica strana piramide $ABCD$ (spojnice polovišta bridova). Duljina srednjice polovina je duljine treće stranice trokuta. Duljina izlomljene linije $MNPQRSM$ stoga je $\frac{1}{2}(10 + 5 + 6 + 7 + 8 + 6) = 21$.

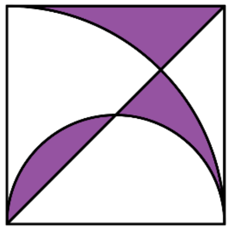
11. [Austrija] Ivan ima crne i bijele jedinične kocke. Iskoristit će njih 27 kako bi napravio $3 \times 3 \times 3$ kocku. Želi da polovina površine te kocke bude crne, a polovina bijele boje. Koji je najmanji mogući broj crnih kockica kojima to može postići?

A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) Ništa od navedenog.

Rješenje: E

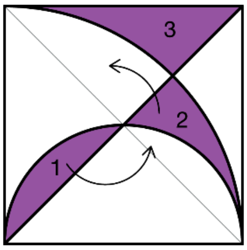
Oplošje velike kocke bit će $6 \cdot 3^2 = 54$. Površina prekrivena pojedinom bojom treba biti jednaka 27.
Najmanji broj crnih kockica postići ćemo tako da postavimo njih 8 u vrhove velike kocke (svakoj se vide 3 strane), jednu na brid velike kocke (vide joj se dvije strane) i još jednu u sredinu jedne strane velike kocke (vidi joj se samo jedna strana). To nas dovodi do najmanjeg broja od 10 crnih jediničnih kockica.

12. [Rusija] U kvadrat stranice duljine 6 cm ucrtana je dijagonala, polukružnica i četvrtina kružnice (vidi sliku). Kolika je površina osjenčanog dijela, u cm^2?



A) 9 B) 3π C) $6\pi - 9$ D) $\frac{10\pi}{3}$ E) 12

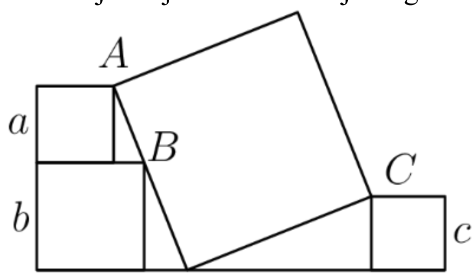
Rješenje: A



Uočimo da se osjenčani dijelovi mogu razmjestiti tako da tvore točno četvrtinu kvadrata (vidi sliku).

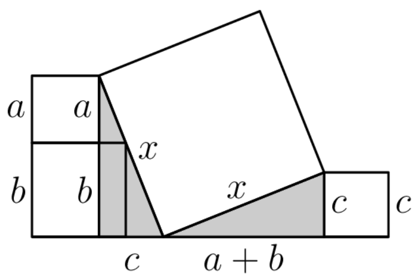
Površina je onda $\frac{6^2}{4} = 9$ cm^2.

13. [Grčka] Na slici su četiri kvadrata. Tri manja imaju duljine stranica a, b i c. Vrhovi A i C dvaju manjih kvadrata podudaraju se s nasuprotnim vrhovima velikog kvadrata. Vrh B trećeg malog kvadrata nalazi se na stranici velikog kvadrata. Koji od ponuđenih izraza predstavlja duljinu stranice najvećeg kvadrata?



A) $\frac{1}{2}(a+b+c)$ B) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ C) $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$ D) $\sqrt{(b-a)^2+c^2}$ E) $\sqrt{a^2+ab+b^2+c^2}$

Rješenje: C



Uočimo da su dva siva trokuta na slici sukladna (podudaraju se u duljini hipotenuze te u kutovima).
Koristeći Pitagorin poučak imamo $x^2 = (a+b)^2 + c^2$.

14. [Rusija] Koliko ima troznamenkastih brojeva koji sadrže barem jednu od znamenaka 1, 2 ili 3?

A) 27 B) 147 C) 441 D) 557 E) 606

Rješenje: E
Svih troznamenkastih brojeva ima 900. Troznamenkastih brojeva koji ne sadrže niti jednu od znamenaka 1, 2 i 3 ima $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$ (znamenka stotica može biti jedan od brojeva 4, 5, 6, 7, 8, 9; znamenke desetica i jedinica mogu biti bilo koji od brojeva 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Troznamenkastih brojeva koji sadrže barem jednu od znamenaka 1, 2 ili 3 onda ima $900 - 294 = 606$.

15. [Australija] Mirta je zapisala četveroznamenkast broj $N = \overline{pqrs}$. Kada je stavila decimalnu točku između znamenaka q i r, primijetila je da je dobiveni broj $\overline{pq.rs}$ prosjek dvoznamenkastih brojeva $\overline{pq}$ i $\overline{rs}$. Odredi zbroj znamenaka broja N.

A) 14 B) 18 C) 21 D) 25 E) 27

Rješenje: B
Znamo da je $\overline{pq.rs} = \frac{\overline{pq}+\overline{rs}}{2}$, tj. $2(\overline{pq} + 0.\overline{rs}) = \overline{pq} + \overline{rs}$.
Slijedi da je $\overline{pq} = \overline{rs} - 2 \cdot 0.\overline{rs} = \overline{rs} - 2 \cdot \frac{\overline{rs}}{100} = \overline{rs} - \frac{\overline{rs}}{50}$, odnosno $50\overline{pq} = 49\overline{rs}$.
Budući da 49 dijeli desnu stranu jednakosti, slijedi da dijeli i lijevu stranu, a s brojem 50 nema zajedničkih djelitelja. Stoga 49 mora dijeliti $\overline{pq}$. Jedine mogućnosti su da je $\overline{pq} = 49$ ili $\overline{pq} = 98$. Ako je $\overline{pq} = 98$, tada bi $\overline{rs}$ bilo jednako 100, a to nije dvoznamenkasti broj. Ako je $\overline{pq} = 49$, tada je $\overline{rs} = 50$, i to je mogućnost koja odgovara uvjetima zadatka. Dakle, $N = 4950$, a suma njegovih znamenaka je 18.

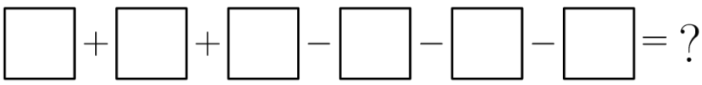
16. [Australija] Dvije svijeće jednake visine počele su gorjeti u isto vrijeme. Jedna od njih izgorjet će za 4 sata, a druga za 5 sati, obje konstantnom brzinom. Nakon koliko će sati jedna od svijeća biti tri puta viša od druge?

A) $\frac{40}{11}$ B) $\frac{45}{12}$ C) $\frac{63}{20}$ D) 3 E) $\frac{47}{14}$

Rješenje: A
Označimo visinu obiju svijeća prije paljenja s v.
U x sati prva će svijeća izgorjeti $\frac{x}{4}$ svoje visine pa će biti $v - \frac{x}{4}v$ visoka.
U x sati druga će svijeća izgorjeti $\frac{x}{5}$ svoje visine pa će biti $v - \frac{x}{5}v$ visoka.
Tražimo x za koji će vrijediti $3\left(v - \frac{x}{4}v\right) = v - \frac{x}{5}v$, iz čega slijedi $x = \frac{40}{11}$.

Pitanja za 5 bodova:

17. [Češka] Andrej ima šest kartica. Na svakoj je kartici sa svake strane napisan jedan broj. Parovi brojeva na karticama su $(5,12)$, $(3,11)$, $(0,16)$, $(7,8)$, $(4,14)$ i $(9,10)$. Kartice se mogu staviti na prazna mjesta na slici u bilo kojem redoslijedu, okrenute na bilo koju stranu. Koji je najmanji rezultat koji Andrej može dobiti?



A) -23 B) -24 C) -25 D) -26 E) -27

Rješenje: D
Uzmimo da su na jednoj kartici napisani brojevi a i A takvi da je $a < A$, a na drugoj kartici brojevi b i B takvi da je $b < B$. Ako je $a + A < b + B$, onda je $a - B < b - A$.
Zato ćemo na prva tri mjesta postaviti manje brojeve s tri kartice s najmanjim zbrojem brojeva na njima $(3, 7$ i $0)$, a na preostala tri mjesta veće brojeve s preostalih kartica $(12, 14$ i $10)$. Dobivamo rezultat -26.

18. [Australija] Klokan rješava jednadžbu $ax^2+bx+c=0$, a Dabar jednadžbu $bx^2+ax+c=0$, gdje su a,b i c međusobno različiti cijeli brojevi i različiti od nule. Ispostavilo se da te dvije jednadžbe imaju točno jedno zajedničko rješenje. Koja od ponuđenih izjava mora biti točna?

A) Zajedničko rješenje mora biti 0.

B) Jednadžba $ax^2+bx+c=0$ ima točno jedno rješenje.

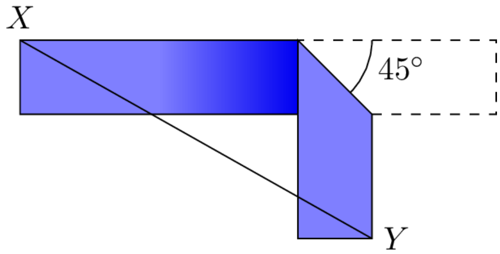
C) $a>0$

D) $b<0$

E) $a+b+c=0$

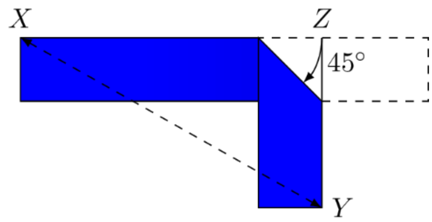
Rješenje: E
Neka je t zajedničko rješenje dviju zadanih kvadratnih jednadžbi. Onda vrijedi $at^2+bt+c=bt^2+at+c$, tj. $(a-b)t(t-1)=0$. Znamo da je $a\neq b$. Iz $c\neq 0$ slijedi $t\neq 0$. Preostaje samo $t-1=0$, tj. $t=1$.
Ako je 1 rješenje jednadžbe $ax^2+bx+c=0$, onda vrijedi $a+b+c=0$.

19. [Australija] Papirnatu vrpcu dugačku 12 cm i široku 2 cm presavinemo tako da njena dva dijela budu pod pravim kutom, kao na slici. Koliko iznosi najmanja moguća udaljenost od X do Y, u cm?



A) $6\sqrt{2}$ B) $7\sqrt{2}$ C) 10 D) 8 E) $6+\sqrt{2}$

Rješenje: B
Uočimo pravokutni trokut YZX. Zbroj duljina njegovih kateta iznosi 14. Hipotenuza će biti najmanja moguća ako se radi o jednakokračnom trokutu. U tom je slučaju $\overline{XY}=7\sqrt{2}$.



20. [Australija] Rajka ima nekoliko simetričnih 12-stranih igraćih kockica sa stranama označenima prirodnim brojevima od 1 do 12. Vjerojatnosti pojavljivanja svakog od tih brojeva međusobno su jednake. Kada ih baca sve odjednom, vjerojatnost da padne samo jedan broj 12 jednaka je vjerojatnosti da ne padne niti jedan broj 12. Koliko kockica ima Rajka?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Rješenje: D
Neka Rajka ima n kockica.

Onda je vjerojatnost da padne samo jedan broj 12 jednaka $\binom{n}{1}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^1\cdot\left(\frac{11}{12}\right)^{n-1}=\frac{n}{12}\cdot\left(\frac{11}{12}\right)^{n-1}$.

Vjerojatnost da ne padne niti jedan broj 12 iznosi $\left(\frac{11}{12}\right)^n$.

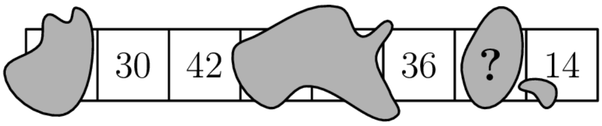
Stoga imamo jednadžbu $\frac{n}{12}\cdot\left(\frac{11}{12}\right)^{n-1}=\left(\frac{11}{12}\right)^n$ iz koje proizlazi $n=11$.

21. [Australija] Za realne brojeve x,y i z vrijede jednakosti $2^x=3, 2^y=7, 6^z=7$. Koji od ponuđenih izraza vrijedi?

A) $z=\frac{y}{1+x}$ B) $z=\frac{x}{y}+1$ C) $z=\frac{y}{x}-1$ D) $z=\frac{x}{y-1}$ E) $z=y-\frac{1}{x}$

Rješenje: A
Znamo da je $x=\log_2 3, y=\log_2 7, z=\log_6 7$.
Također znamo da je $z=\log_6 7=\frac{\log_2 7}{\log_2 6}=\frac{y}{\log_2(2\cdot 3)}=\frac{y}{\log_2 2+\log_2 3}=\frac{y}{1+x}$.

22. [Grčka] Inicijalno je u svaki od osam kvadratića na papiru upisan broj 0. U svakom potezu odabiremo četiri uzastopna kvadratića od njih osam te brojevima upisanim u njima pribrajamo 1. Na slici je prikazano stanje nakon određenog broja poteza, no tinta je prekrila neke brojeve. Koji je broj u kvadratiću označenom upitnikom?



A) 24 B) 30 C) 36 D) 48 E) Ništa od navedenog.

Rješenje: A

Nakon a poteza s prva četiri kvadratića, b poteza s druga četiri kvadratića, …, e poteza sa zadnja četiri kvadratića, imat ćemo situaciju kao na slici:

A	B	C	D	E	F	G	H
a	$a+b$	$a+b+c$	$a+b+c+d$	$b+c+d+e$	$c+d+e$	$d+e$	e

Gledajući kvadratiće B i C uočavamo da je $c = 12$. Nadalje, broj u kvadratiću G dobit ćemo oduzimanjem broja c od broja koji se nalazi u kvadratiću F. Rješenje je broj $36 - 12 = 24$.

23. [Grčka] Za funkciju $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vrijedi $f(20 - x) = f(22 + x)$ za svaki realan broj x. Poznato je da funkcija f ima samo dvije nultočke. Koliko iznosi zbroj tih dviju nultočaka?

A) -1 B) 20 C) 21 D) 22 E) Ništa od navedenog.

Rješenje: E

Uočimo da vrijedi $f\big(21 - (x+1)\big) = f(21 + (x+1))$, tj. $f(21 - t) = f(21 + t)$. Zaključujemo da je pravac $x = 21$ os simetrije grafa funkcije f. Nultočke su onda također simetrične s obzirom na taj pravac, tj. iznose $21 - a$ i $21 + a$. Njihova je suma 42.

24. [Australija] Kružnica je s 12 točaka podijeljena na 12 jednakih dijelova. Koliko ima trokuta kojima su vrhovi u tim točkama, a koji imaju kut mjere 45°?

A) 48 B) 60 C) 72 D) 84 E) 96

Rješenje: D

Promotrimo problem na način da tražimo obodne kutove mjere 45° nad tetivama dobivenim povezivanjem zadanih točaka. To znači da će njemu pripadni središnji kut iznositi 90°. Središnji kut mjere 90° dobit ćemo povezivanjem bilo koje od danih točaka s onom koja je za 3 točke dalje od nje (pripadni je luk četvrtina kružnice). Spajanjem krajeva jedne takve tetive s bilo kojom točkom na duljem luku kružnice dobit ćemo trokut u kojem je barem jedan kut mjere 45°, njih 8. Za 12 tetiva to je $12 \cdot 8 = 96$ trokuta, no one jednakokračne brojili smo dva puta pa će konačan rezultat biti $96 - 12 = 84$.

Obavijesti o rješenjima zadataka i rezultatima mogu se naći na mrežnim stranicama HMD-a.
http://www.matematika.hr/klokan/2024/