MATEMATIČKI KLOKAN

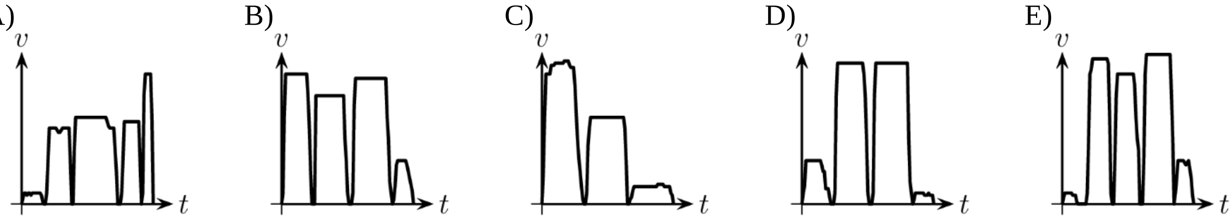
RJEŠENJA ZADATAKA

J

Pitanja za 3 boda:

1. [Njemačka] Marija je potrčala da uhvati autobus u kojemu se vozila dvije stanice, a zatim je prošetala do škole. Koji od danih v-t dijagrama najbolje opisuje njezino putovanje?

A) B) C) D) E)



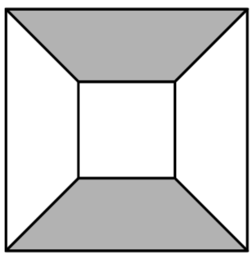
Rješenje
D
Marijina je brzina najveća dok je u autobusu (dvije stanice), prije čega trči, a nakon čega hoda. Hoda sporije no što trči.

2. [Švedska] Prirodni su brojevi m i n neparni. Koji je od danih brojeva također neparan?

A) $m(n+1)$ B) $(m+1)\cdot(n+1)$ C) $m+n+2$ D) $m\cdot n+2$ E) $m+n$

Rješenje
D
Ako su m i n neparni, brojevi $m+1$, $n+1$ i $n+m$ su parni. Stoga su umnošci pod A, B, C i E parni.

3. [Slovačka] Na slici su prikazana dva kvadrata, manji stranice duljine 4 i veći stranice duljine 10. Koji je dio velikoga kvadrata osjenčan?



A) 25 % B) 30 % C) 40 % D) 42 % E) 45 %

Rješenje
D
Svaki od dva osjenčana trapeza ima osnovice duljina 10 i 4, a zbroj njihovih visina iznosi $10-4=6$. Osjenčana je površina stoga $\frac{10+4}{2}\cdot 6=42$. Kako je površina velikoga kvadrata 100, traženi je postotak 42 %.

4. [Mađarska] Danas je četvrtak. Koji će dan u tjednu biti za 2023 dana?

A) utorak B) srijeda C) četvrtak D) petak E) subota

Rješenje
C
Broj 2023 djeljiv je brojem 7 pa će za 2023 dana također biti četvrtak.

5. [Ujedinjeno Kraljevstvo] Zbroj godina članova peteročlane obitelji iznosi 80. Dvoje najmlađih ima 6 i 8 godina. Koliki je bio zbroj godina članova ove obitelji prije sedam godina?

   A) 35 B) 36 C) 45 D) 46 E) 66

   Rješenje
   D
   Prije sedam godina najmlađi član obitelji još nije bio rođen. Zbroj godina četvero najstarijih članova obitelji iznosi 74. Prije sedam godina taj je zbroj iznosio $74 - 4 \cdot 7 = 46$.

6. [Italija] Drvena ograda sastoji se od dasaka: svake dvije susjedne vertikalne daske spojene su s četiri horizontalne. Na oba kraja ograde nalaze se vertikalne daske. Koji bi od danih brojeva mogao biti ukupan broj dasaka od kojih se sastoji takva ograda?

   A) 95 B) 96 C) 97 D) 98 E) 99

   Rješenje
   B
   Izuzmemo li prvu vertikalnu dasku, svako će se polje sastojati od 5 dasaka (četiri horizontalne i jedne vertikalne). Dakle, ukupan broj dasaka mora biti oblika $5n + 1$, a to je istina samo za odgovor B.

7. [Njemačka] Brojeve a i b potrebno je zamijeniti prirodnim brojevima tako da vrijedi jednakost $\frac{a}{5} = \frac{7}{b}$. Na koliko se načina to može učiniti?

   A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

   Rješenje
   E
   Dana jednadžba ekvivalentna je jednadžbi $a \cdot b = 5 \cdot 7$. Kako su 5 i 7 prosti brojevi, svi mogući parovi (a, b) za koje ta jednadžba vrijedi su $(1, 35)$, $(35, 1)$, $(5, 7)$ i $(7, 5)$.

8. [Paragvaj] Nakon odigranih 200 partija šaha, imam točno 49 % pobjeda. Koliko još najmanje partija trebam odigrati da bih imao točno 50 % pobjeda?

   A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

   Rješenje
   E
   Trenutno imam 98 pobjeda i 102 poraza. Pobijedim li u sljedeće 4 partije, imat ću 102 pobjede i 102 poraza, tj. točno 50 % pobjeda.

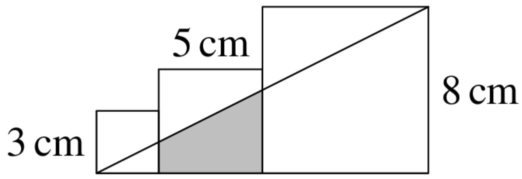
Pitanja za 4 boda:

9. [Njemačka] Jasna pokušava smanjiti potrošnju vode. Skratila je vrijeme koje provede pod tušem za četvrtinu. Također, smanjila je pritisak vode tako da sada iz slušalice tuša voda izlazi za četvrtinu manjom brzinom. Koliko je Jasna ukupno smanjila potrošnju vode pri jednome tuširanju?

   A) za $\frac{1}{4}$ B) za $\frac{3}{8}$ C) za $\frac{5}{8}$ D) za $\frac{5}{12}$ E) za $\frac{7}{16}$

   Rješenje
   E
   Jasna sada ukupno troši $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ količine vode koju je trošila prije. To je smanjenje za $1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.

10. [Ujedinjeno Kraljevstvo] Na slici su tri kvadrata stranica duljina 3 cm, 5 cm i 8 cm. Kolika je površina osjenčanog trapeza?



A) 13 cm^2 B) $\frac{55}{4}$ cm^2 C) $\frac{61}{4}$ cm^2 D) $\frac{65}{4}$ cm^2 E) $\frac{69}{4}$ cm^2

Rješenje

B

Označimo osnovice osjenčanog trapeza s a i b. Zbog sličnosti trokuta imamo razmjer

$3 : a = (3+5) : b = (3+5+8) : 8$, iz kojega računamo $a = \frac{3}{2}$ i $b = 4$. Površina trapeza je $\frac{\frac{3}{2}+4}{2} \cdot 5 = \frac{55}{4}$.

11. [Španjolska] Žica duljine 95 m prerezana je na tri dijela tako da je svaki dio 50 % dulji od prethodnog. Koliko je dugačak najdulji dio?

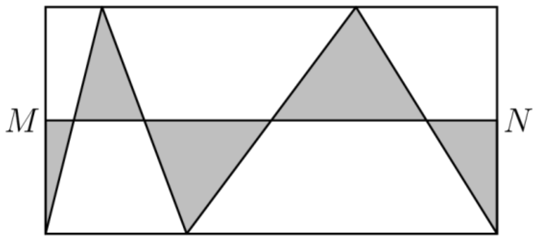
A) 36 m B) 42 m C) 45 m D) 46 m E) 48 m

Rješenje

C

Ako je x duljina najkraćega dijela, onda vrijedi: $x + 1.5x + (1.5)^2x = 95$, tj. $\frac{19}{4}x = 95$. Stoga je $x = 20$, a najdulji je dio duljine 45 cm.

12. [Paragvaj] Točke M i N polovišta su dviju stranica pravokutnika na slici. Koliki je dio pravokutnika osjenčan?



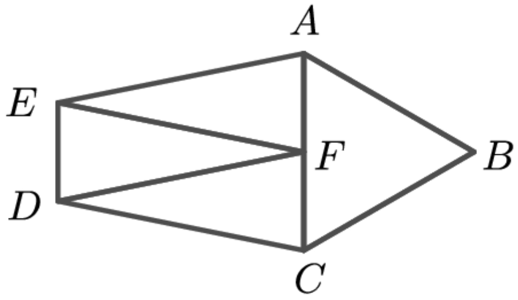
A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Rješenje

C

Zbrojimo li duljine stranica svih osjenčanih trokuta koje leže na dužini $\overline{MN}$, dobit ćemo upravo cijelu duljinu dužine $\overline{MN}$, tj. dulje stranice pravokutnika, a. Visine tih trokuta na stranicu koja leži na dužini $\overline{MN}$ međusobno su jednake i iznose pola duljine kraće stranice pravokutnika, $\frac{b}{2}$. Zbroj svih osjenčanih površina stoga je $\frac{a \cdot \frac{b}{2}}{2} = \frac{1}{4}ab$.

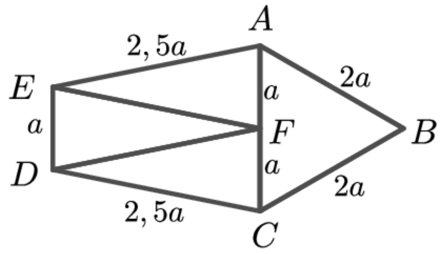
13. [Španjolska] Peterokut $ABCDE$ podijeljen je na četiri trokuta jednakih opsega. Trokut ABC je jednakostraničan, a trokuti AEF, DFE i CDF sukladni su jednakokračni trokuti. Koliki je omjer opsega peterokuta $ABCDE$ i opsega trokuta ABC?



A) $2:1$ B) $3:2$ C) $4:3$ D) $5:3$ E) $5:2$

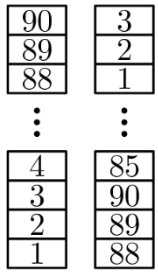
Rješenje

D



Označimo s $2a$ duljinu stranice jednakostraničnog trokuta ABC. Onda duljine dužina $\overline{CF}$, $\overline{FA}$ i $\overline{DE}$ iznose a. Kako su opsezi svih trokuta jednaki, zaključujemo da su duljine krakova sukladnih jednakokračnih trokuta $2.5a$. Omjer koji se traži iznosi $\frac{10a}{6a} = \frac{5}{3}$.

14. [Poljska] Na stolu se nalazi toranj blokova numeriranih od 1 do 90. Bojan uzima tri po tri bloka istovremeno s vrha toga tornja kako bi izgradio novi toranj, kao na slici. Koliko će blokova biti između onih numeriranih s 39 i 40 kada Bojan završi s gradnjom novoga tornja?



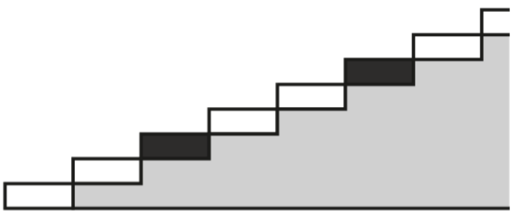
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Rješenje

E

U novom se tornju ispod svakog bloka numeriranog višekratnikom broja 3, $3n$, nalaze dva bloka numerirana $3n-1$ i $3n-2$. Bojan će prvo premjestiti tri bloka 42, 41, 40 a zatim blokove 39, 38, 37. Stoga će, gledajući odozgo, blokovi u novom tornju biti poredani ovako: 39, 38, 37, 42, 41, 40. Vidimo da će između blokova numeriranih s 39 i 40 biti četiri bloka.

15. [Austrija] Svaka treća stuba stubišta s 2023 stube obojena je crno. Prvih je sedam stuba prikazano na slici. Anita hoda uza stube ne preskačući ih. Počinje ili desnom ili lijevom nogom te ih prirodno izmjenjuje svakim korakom. Koji je najmanji broj crnih stuba na koje će nagaziti desnom nogom?



A) 0 B) 333 C) 336 D) 337 E) 674

Rješenje

D

Bez obzira na to počinje li uspon lijevom ili desnom nogom, Anita će svakih 6 stuba dva puta nagaziti na crne stube (jednom lijevom i jednom desnom nogom). Kako je $2023 = 6 \cdot 337 + 1$, zadnja stuba na koju će nagaziti bit će bijela, a prije toga će desnom nogom nagaziti na 337 crnih stuba.

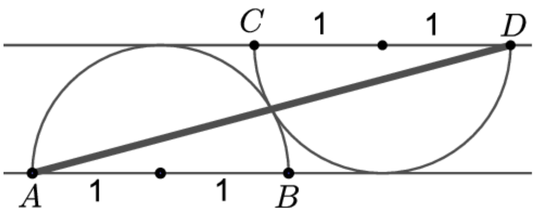
16. Grupa studenata odgovarala je na tri pitanja. Na prvo je pitanje točan odgovor dalo 90 % studenata, na drugo pitanje 80 % studenata, a na treće pitanje 70 % studenata. Koji je najmanji postotak studenata zasigurno odgovorio točno na sva tri pitanja?

A) 30 % B) 35 % C) 40 % D) 50 % E) 70 %

Rješenje
C
Vrijedi da je $k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B)$, tj. $k(A \cap B) = k(A) + k(B) - k(A \cup B)$. Neka se u skupu A nalazi a %, a u skupu B b % svih elemenata. Kako u skupu $A \cup B$ može biti najviše 100 % svih elemenata, tako u skupu $A \cap B$ mora biti barem $a\ \% + b\ \% - 100\ \%$ svih elemenata.
Na prvo i drugo pitanje točno je odgovorilo barem $90\ \% + 80\ \% - 100\ \% = 70\ \%$ studenata. Na sva tri pitanja točno je odgovorilo barem $70\ \% + 70\ \% - 100\ \% = 40\ \%$ studenata.

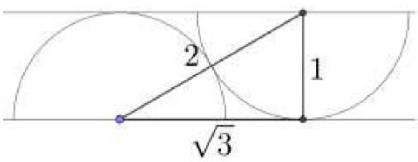
Pitanja za 5 bodova:

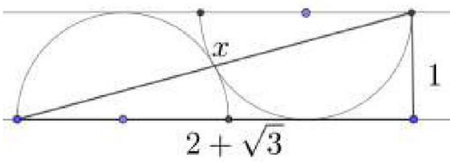
17. [Španjolska] Na slici su prikazane dvije polukružnice radijusa 1 koje se dodiruju. Njihovi promjeri AB i CD paralelni su. Koliko iznosi kvadrat udaljenosti točaka A i D?



A) 16 B) $8 + 4\sqrt{3}$ C) 12 D) 9 E) $5 + 2\sqrt{3}$

Rješenje
B
Rješenje slijedi iz dvije primjene Pitagorina poučka:





$x = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 8 + 4\sqrt{3}.$

18. [Poljska] U Klokstroj unosimo niz od četiri broja. Klokstroj zatim ispisuje najmanji nenegativni cijeli broj različit od četiriju prethodno zapisanih brojeva te taj postupak ponavlja dok ga ne zaustavimo.
Jakov je unio brojeve 2, 0, 2, 3. Koji će broj Klokstroj ispisati na 2023. mjestu?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Rješenje
C
Klokstroj će ispisivati redom 2, 0, 2, 3, 1, 4, 0, 2, 3, 1, 4, 0, 2, 3, 1, 4, … Vidimo da će se nakon prvog broja 2 ponavljati niz 0, 2, 3, 1, 4 koji ima period 5. Na 2023. mjestu bit će isti broj kao na drugome mjestu u periodu, dakle broj 2.

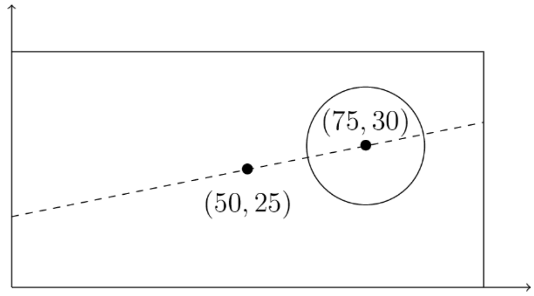
19. [Australija] Iz pravokutnika s vrhovima u točkama $(0, 0)$, $(100, 0)$, $(100, 50)$ i $(0, 50)$ izrezan je krug radijusa 10 sa središtem u točki $(75, 30)$. Koji je nagib pravca kroz točku $(75, 30)$ koja raspolavlja preostalu površinu?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

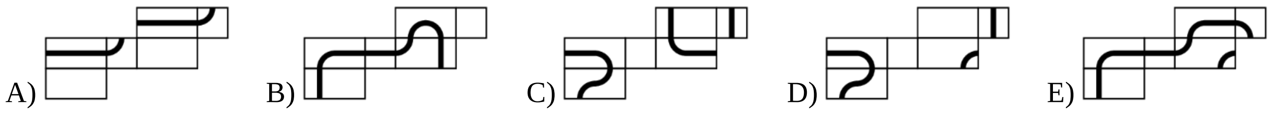
Rješenje

A

Svaki pravac kroz središte kruga raspolovit će taj krug. Svaki pravac kroz sjecište dijagonala pravokutnika raspolovit će taj pravokutnik. Stoga će pravac kroz središte kruga $(75, 30)$ i središte pravokutnika $(50, 25)$ raspoloviti površinu preostalu nakon izrezivanja kruga iz pravokutnika. Nagib toga pravca je $\frac{30-25}{75-50} = \frac{1}{5}$.



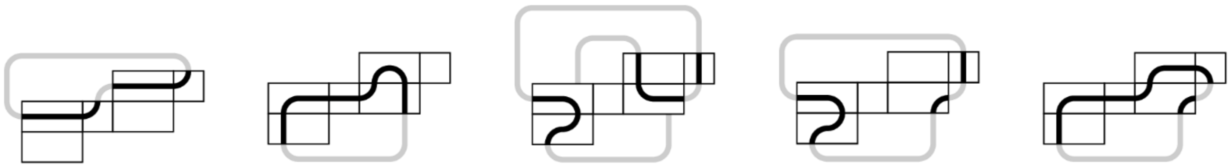
20. [Slovenija] Leon je nacrtao zatvorenu krivulju na kvadru, a zatim je kvadar razmotao u mrežu. Koja od danih mreža ne može biti mreža Leonova kvadra?



Rješenje

C

Mreže se mogu spojiti u kvadar na jedinstven način. Sive linije na slikama pokazuju koje je strane potrebno zalijepiti:



Vidimo da samo na kvadru C nemamo zatvorenu krivulju.

21. [Mađarska] Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva za koje vrijedi da je razlika toga broja i zbroja njegovih znamenaka troznamenkast broj kojemu su sve znamenke međusobno jednake?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 20 E) 30

Rješenje

D

Označimo traženi troznamenkasti broj $\overline{abc}$. Razlika toga broja i zbroja njegovih znamenaka tada je $100a + 10b + c - a - b - c = 99a + 9b$, što je broj djeljiv s 9. Svi troznamenkasti brojevi kojima su sve znamenke jednake, a djeljiv je brojem 9, su 333, 666 i 999.

Broj 999 ne možemo dobiti budući da su a i b znamenke, dakle iz skupa $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Za broj 666 imamo jednadžbu $99a + 9b = 666 \Rightarrow 11a + b = 37 \Rightarrow b = 74 - 11a \Rightarrow a = 6, b = 8$. Iz ovog slučaja dobivamo da broj $\overline{abc}$ može biti $\overline{68c}$, gdje je c bilo koja od 10 znamenaka.

Za broj 333 imamo jednadžbu $99a + 9b = 333 \Rightarrow 11a + b = 37 \Rightarrow b = 37 - 11a \Rightarrow a = 3, b = 4$. Iz ovog slučaja dobivamo da broj $\overline{abc}$ može biti $\overline{34c}$, gdje je c bilo koja od 10 znamenaka.

Zaključujemo da ima 20 brojeva s traženim svojstvom.

22. [Mađarska] Na koliko se različitih načina iz donje tablice može pročitati riječ BANANA? Iz svake se ćelije možemo pomaknuti u ćeliju koja s njom ima zajedničku stranicu. Ćelije je moguće posjetiti više puta.

B	A	N
A	N	A
N	A	N

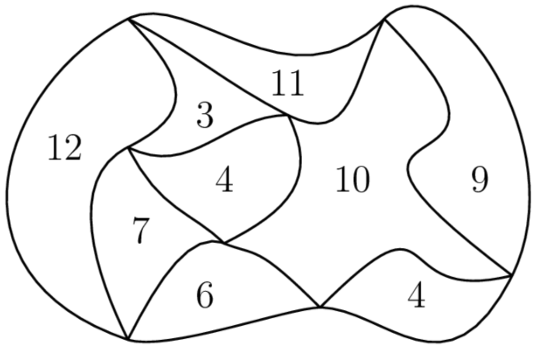
A) 14 B) 28 C) 56 D) 84 E) Ništa od navedenog.

Rješenje
D
Razlikujemo tri slučaja prema tome gdje se nalazi prvo slovo N u riječi BANANA:
1) Prvo slovo N u prvom je retku (samo je jedan način da do njega dođemo).
- Ako je drugo slovo N na istoj poziciji, postoje $2 \cdot 2 = 4$ načina.
- Ako je drugo slovo N u drugom retku, postoje $2 \cdot 4 = 8$ načina.
- Ako je drugo slovo N u trećem retku (i trećem stupcu), postoje $1 \cdot 2 = 2$ načina.

Ukupno: $1 \cdot (4 + 8 + 2) = 14$ načina.
2) Prvo slovo N u drugom je retku (dva su načina da do njega dođemo).
- Ako je drugo slovo N na istoj poziciji, postoje $4 \cdot 4 = 16$ načina.
- Ako je drugo slovo N bilo koje od tri preostala, postoje $2 \cdot 2 = 4$ načina.

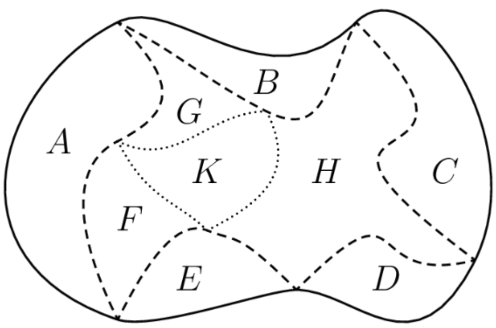
Ukupno: $2 \cdot (16 + 3 \cdot 4) = 56$ načina.
3) Prvo slovo N u trećem je retku (i prvom stupcu).
Ovaj slučaj simetričan je prvome pa i tu imamo 14 načina.
Konačno imamo $14 + 56 + 14 = 84$ načina.

23. [Grčka] Na slici je prikazana karta parka koji je podijeljen na područja. Unutar svakog područja upisan je njegov opseg u kilometrima. Koliki je opseg vanjskog ruba parka?



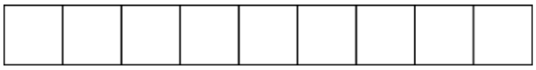
A) 22 km B) 26 km C) 28 km D) 32 km E) Ništa od navedenog.

Rješenje
B



Zbroj opsega regija A, B, C, D i E daje opseg vanjskog ruba parka uvećan za duljine iscrtkanih krivulja. Oduzmemo li od toga zbroja opsege regija F, G i H, oduzeli smo duljine iscrtkanih krivulja, no oduzeli smo i duljine istočkanih krivulja. Problem ćemo riješiti dodavanjem opsega regije K.
Zaključujemo da opseg vanjskog ruba parka iznosi
$(A + B + C + D + E) - (F + G + H) + K = 42 - 20 + 4 = 26$ km.

24. [Meksiko] Pia želi upisati prirodne brojeve od 1 do 9 u devet kvadratića na slici tako da zbroj brojeva u bilo koja tri susjedna kvadratića bude višekratnik broja 3. Na koliko to načina može učiniti?



A) 6^4 B) 6^3 C) 2^9

D) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ E) $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Rješenje

A

Da bi zbroj brojeva u bilo koja tri susjedna kvadratića bio djeljiv brojem tri, ostatci pri dijeljenju s 3 trebaju se pojavljivati ciklički: ABCABCABC, gdje su A, B i C po jedan broj iz skupa mogućih ostataka pri dijeljenju brojem 3, $\{0,1,2\}$. Postoji $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina da ostatke raspodijelimo po slovima A, B i C.
Zatim brojeve koji daju ostatak 0 (3, 6 i 9) možemo razmjestiti na 6 načina na odgovarajuće pozicije.
Brojeve koji daju ostatak 1 (1, 4 i 7) također možemo na 6 načina razmjestiti na odgovarajuće pozicije.
Analogno, brojeve koji daju ostatak 2 (2, 5 i 8) možemo na odgovarajuće pozicije razmjestiti na 6 načina.
Ukupno postoji $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$ načina da Pia na željeni način razmjesti brojeve.

Obavijesti o rješenjima zadataka i rezultatima mogu se naći na mrežnim stranicama HMD-a.
http://www.matematika.hr/klokan/2023/