

# Povijest matematike

## Cardano, kubne jednačbe i kompleksni brojevi

Franka Miriam Brückler

Stručno-metodička večer HMD-a 1. veljače 2023.



# Klasifikacija jednačbi do stupnja 3

$$x^2 = bx, x^2 = c, bx = c,$$
$$x^2 + bx = c, x^2 + c = bx, x^2 = bx + c$$

# Klasifikacija jednačbi do stupnja 3

$$\begin{aligned}x^2 &= bx, x^2 = c, bx = c, \\x^2 + bx &= c, x^2 + c = bx, x^2 = bx + c \\x^3 &= ax^2, \\x^3 + ax^2 &= bx, x^3 + bx = ax^2, x^3 = ax^2 + bx,\end{aligned}$$

# Klasifikacija jednačbi do stupnja 3

$$\begin{aligned}x^2 &= bx, x^2 = c, bx = c, \\x^2 + bx &= c, x^2 + c = bx, x^2 = bx + c \\x^3 &= ax^2, \\x^3 + ax^2 &= bx, x^3 + bx = ax^2, x^3 = ax^2 + bx, \\x^3 &= c,\end{aligned}$$

# Klasifikacija jednačbi do stupnja 3

$$\begin{aligned}x^2 &= bx, x^2 = c, bx = c, \\x^2 + bx &= c, x^2 + c = bx, x^2 = bx + c \\x^3 &= ax^2, \\x^3 + ax^2 &= bx, x^3 + bx = ax^2, x^3 = ax^2 + bx, \\x^3 &= c, \\x^3 + bx &= c, x^3 + c = bx, x^3 = bx + c, \\x^3 + ax^2 &= c, x^3 + c = ax^2, x^3 = ax^2 + c, \\x^3 + ax^2 + bx &= c, x^3 + ax^2 + c = bx, \\x^3 + bx + c &= ax^2, x^3 = ax^2 + bx + c, \\x^3 + ax^2 &= bx + c, x^3 + bx = ax^2 + c, x^3 + c = ax^2 + cx.\end{aligned}$$

## Reducirane kubne jednačbe

Supstitucijom  $x = y - \text{trećina koeficijenta uz kvadratni član}$  se svaka normirana kubna jednačba svodi na kubnu jednačbu bez kvadratnog člana:

### Primjer

$$x^3 + 3x^2 = 12x + 18 \ \& \ x = y - 1 \Rightarrow y^3 = 15y + 4$$

# Reducirane kubne jednačbe

Supstitucijom  $x = y - \text{trećina koeficijenta uz kvadratni član}$  se svaka normirana kubna jednačba svodi na kubnu jednačbu bez kvadratnog člana:

## Primjer

$$x^3 + 3x^2 = 12x + 18 \ \& \ x = y - 1 \Rightarrow y^3 = 15y + 4$$

## Tri tipa reducirane kubne jednačbe

$$x^3 + bx = c$$

$$x^3 = bx + c$$

$$x^3 + c = bx$$

Koeficijenti su  $b = A^2 > 0$  i  $c = B^3 > 0$ , uz uzimanje u obzir tzv. principa homogenosti.



## Renesansna talijanska algebra

- **Fra Luca Pacioli** (1445.–1517.): *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494.); „odrediti rješenja kubne jednačbe podjednako je nemoguće u trenutnom stanju znanosti kao i kvadratura kruga“

## Renesansna talijanska algebra

- **Fra Luca Pacioli** (1445.–1517.): *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494.); „odrediti rješenja kubne jednačbe podjednako je nemoguće u trenutnom stanju znanosti kao i kvadratura kruga“
- **Scipione del Ferro** (1463.?–1526.): Oko 1515. našao je algebarsku metodu za rješavanje kubnih jednačbi tipa  $x^3 + bx = c$ . Pred smrt je svoju metodu priopćio svom studentu **Antoniu del Fioreu**, a njegove je bilješke naslijedio zet mu **Hanninal Nave**.

## Renesansna talijanska algebra

- **Fra Luca Pacioli** (1445.–1517.): *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494.); „odrediti rješenja kubne jednačbe podjednako je nemoguće u trenutnom stanju znanosti kao i kvadratura kruga“
- **Scipione del Ferro** (1463.?–1526.): Oko 1515. našao je algebarsku metodu za rješavanje kubnih jednačbi tipa  $x^3 + bx = c$ . Pred smrt je svoju metodu priopćio svom studentu **Antoniu del Fioreu**, a njegove je bilješke naslijedio zet mu **Hanninal Nave**.
- **Niccolò Fontana Tartaglia** (1500.?–1557.): 1530-ih godina je Tartaglia otkrio metodu za rješavanje kubne jednačbe oblika  $x^3 + ax^2 = c$ , Fior ga je 1535. izazvao na natjecanje:

### Primjer Fiorovog zadatka

Nađi broj koji zbrojen sa svojim kubom daje 6 ( $x^3 + x = 6$ ).

# Girolamo Cardano (1501.–1576.)



Rođen u Paviji kao izvanbračno dijete milanskog pravника Fazia Cardana i mlade udovice Chiare Michene.

Studirao je medicinu (prvo kvadrivij u Paviji, a zatim nastavio studij u Padovi). Tijekom studija počeo se baviti i kockanjem. Po završenom studiju postao je liječnik u selu Saccu kraj Padove (1526.).

Oženio se (1531.) mladom Luciom Badarini s kojom je dobio troje djece: Giambatistu (1534.), Alda (1543.) i Chiaru (1537.). Kratko po vjenčanju preselio se u Milano, gdje su ispočetka živjeli u skloništu za siromašne.

Uskoro je dobio posao predavača, a njegova predavanja o matematici, geografiji i arhitekturi privlačila su mnoge slušače. Paralelno je zarađivao i kockanjem te (ilegalnim) liječenjem, a njegove su savjete tražili mnogi liječnici.

Oženio se (1531.) mladom Luciom Badarini s kojom je dobio troje djece: Giambatistu (1534.), Alda (1543.) i Chiaru (1537.). Kratko po vjenčanju preselio se u Milano, gdje su ispočetka živjeli u skloništu za siromašne.

Uskoro je dobio posao predavača, a njegova predavanja o matematici, geografiji i arhitekturi privlačila su mnoge slušače. Paralelno je zarađivao i kockanjem te (ilegalnim) liječenjem, a njegove su savjete tražili mnogi liječnici.

Saznao je za natjecanje Tartaglie i Fiorea te je 1539. nagovorio Tartagliu da dođe u Milano i da mu 'u povjerenju' oda 'svoju' metodu.

# Pjesmica

Quando chel cubo con le cose  
appresso  
Se aquaglia à qualche numero  
discreto  
Trouan dui altri differenti in esso.  
Dapoi terrai questo per consueto  
Che'llor productto sempre sia  
eguale  
Alterzo cubo delle cose neto,  
El residuo poi suo generale  
Delli lor lati cubi ben sottrati  
Varra la tua cosa principale.

...

Kad su kub i stvari skupa  
Jednaki nekom diskretnom broju,  
Nalaze se u njem kao razlika  
druga dva broja.  
Tad zadržat ćeš kao naviku  
Da im produkt uvijek treba biti  
Jednak kubu trećine od stvari.  
Ostatak tad, tako će pravilo,  
Od njihovih oduzetih kubnih  
korijena  
Bit će jednak tvojoj osnovnoj  
stvari.

...

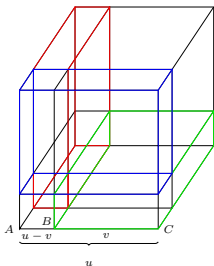
$$x^3 + bx = c \Rightarrow x = u - v \Rightarrow \dots$$





# XI. O kubu i prvij potenciji jednakim broju ( $x^3 + bx = c$ )

„Scipione del Ferro iz Bologne prije gotovo trideset godina otkrio je ovo pravilo i predao ga Antonija Maria del Fioru iz Venecije, čije natjecanje s Niccolòm Tartagliom iz Bresciae je Niccòlu dalo priliku da ga i on otkrije. On [Tartaglia] mi ga je dao kao odgovor na moje zamolbe, iako je za sebe zadržao njegov izvod. Oboružan tom pomoći, pronašao sam njegov izvod u [raznim] oblicima. To je bilo vrlo teško. Moja verzija je kako slijedi.”

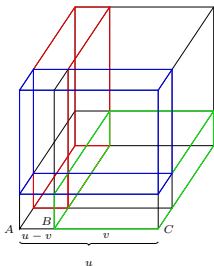


$$|AC|^2 - |BC|^2 = c,$$

$$|AC| \cdot |BC| = \frac{b}{3}$$

# XI. O kubu i prvij potenciji jednakim broju ( $x^3 + bx = c$ )

„Scipione del Ferro iz Bologne prije gotovo trideset godina otkrio je ovo pravilo i predao ga Antonija Maria del Fioru iz Venecije, čije natjecanje s Niccolòm Tartagliom iz Bresciae je Niccòlu dalo priliku da ga i on otkrije. On [Tartaglia] mi ga je dao kao odgovor na moje zamolbe, iako je za sebe zadržao njegov izvod. Oboružan tom pomoći, pronašao sam njegov izvod u [raznim] oblicima. To je bilo vrlo teško. Moja verzija je kako slijedi.”



$$|AC|^2 - |BC|^2 = c,$$

$$|AC| \cdot |BC| = \frac{b}{3}$$

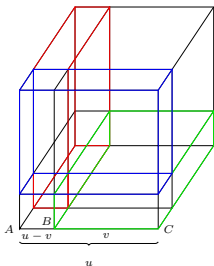
$|AB| = u - v$  je rješenje jednačbe:

$$u^3 - v^3 = c, \quad uv = \frac{b}{3}$$

$$u^3 = v^3 + (u-v)^3 + 3(u-v)^2v + 3v^2(u-v)$$

# XI. O kubu i prvij potenciji jednakim broju ( $x^3 + bx = c$ )

„Scipione del Ferro iz Bologne prije gotovo trideset godina otkrio je ovo pravilo i predao ga Antonija Maria del Fioru iz Venecije, čije natjecanje s Niccolòm Tartagliom iz Bresciae je Niccòlu dalo priliku da ga i on otkrije. On [Tartaglia] mi ga je dao kao odgovor na moje zamolbe, iako je za sebe zadržao njegov izvod. Oboružan tom pomoći, pronašao sam njegov izvod u [raznim] oblicima. To je bilo vrlo teško. Moja verzija je kako slijedi.”



$$|AC|^2 - |BC|^2 = c,$$

$$|AC| \cdot |BC| = \frac{b}{3}$$

$|AB| = u - v$  je rješenje jednačbe:

$$u^3 - v^3 = c, \quad uv = \frac{b}{3}$$

$$u^3 = v^3 + (u-v)^3 + 3(u-v)^2v + 3v^2(u-v)$$

$$\Rightarrow c = x^3 + 3vx^2 + 3v^2x = x^3 + 3uvx$$

$$\Rightarrow c = x^3 + bx$$

Rješenje jednačbe  $x^3 + bx = x$ 

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} = c \Rightarrow (u^3)^6 = 2\frac{c}{2}u^3 + \left(\frac{b}{3}\right)^3$$

Rješenje jednačbe  $x^3 + bx = x$ 

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} = c \Rightarrow (u^3)^6 = 2 \frac{c}{2} u^3 + \left(\frac{b}{3}\right)^3$$

„Kubiraj trećinu koeficijenta uz nepoznanicu, dodaj ga kvadratu polovine konstante iz jednačbe; uzmi drugi korijen iz svega. Udvostruči to, i jednom od to dvoje dodaj polovinu broja kojeg si već kvadirao i od drugog oduzmi polovinu istog. Tada oduzmi treći korijen apotoma od trećeg korijena binoma, ono što dobiješ je vrijednost nepoznanice.”

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} - \frac{c}{2}}$$

## 1.cu.p.6.pos.aeq.20.

$$x^3 + 6x = 20$$

$$u^3 - v^3 = 20, \quad uv = 2$$

## 1.cu.p.6.pos.aeq.20.

$$x^3 + 6x = 20$$

$$u^3 - v^3 = 20, \quad uv = 2$$

$$v = \frac{2}{u} \Rightarrow$$

$$u^3 - \frac{8}{u^3} = 20,$$

$$u^6 - 20u^3 = 8,$$

$$(u^3 - 10)^2 = 108,$$

$$u^3 = t = 10 + \sqrt{108},$$

$$x = u - v = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

## XII. O kubu jednakom prvoj potenciji i broju

$$x^3 = bx + c$$

$$x = u + v, \quad u^3 + v^3 = c, \quad uv = \frac{b}{3}$$



## XII. O kubu jednakom prvoj potenciji i broju

$$x^3 = bx + c$$

$$x = u + v, \quad u^3 + v^3 = c, \quad uv = \frac{b}{3}$$

1.cu.aeq.6.pos.p.6.

$$x^3 = 6x + 6$$

$$x = u + v \Rightarrow u^3 + v^3 = 6, \quad uv = 2 \Rightarrow$$

$$u^3 + \frac{8}{u^3} = 6, \quad (u^3 - 3)^2 = 1, \Rightarrow$$

## XII. O kubu jednakom prvoj potenciji i broju

$$x^3 = bx + c$$

$$x = u + v, \quad u^3 + v^3 = c, \quad uv = \frac{b}{3}$$

1.cu.aeq.6.pos.p.6.

$$x^3 = 6x + 6$$

$$x = u + v \Rightarrow u^3 + v^3 = 6, \quad uv = 2 \Rightarrow$$

$$u^3 + \frac{8}{u^3} = 6, \quad (u^3 - 3)^2 = 1, \Rightarrow$$

$$u = \sqrt[3]{4}, v = \sqrt[3]{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}.$$

# XIII. O kubu i broju jednakim prvoj potenciji

$$x^3 + c = bx$$

# XIII. O kubu i broju jednakim prvaj potenciji

$$x^3 + c = bx$$

Uspoređuje s rješenjem jednačbe tipa

$$y^3 = by + c :$$

$$x_1 + x_2 = y \Rightarrow x_{1,2} = \frac{y}{2} \pm \sqrt{b - 3 \left(\frac{y}{2}\right)^2}.$$

1.cu.p.3.aeq.8.pos.

$$x^3 + 3 = 8x \quad y^3 = 8y + 3$$

$$y = 3$$

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{8 - 3 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

## XXXVII. O pravilu za postuliranje negativnog

„Ako bi bilo rečeno, podijeli 10 na dva dijela čiji umnožak je 30 ili 40, očito je da je ovaj slučaj nemoguć<sup>c</sup>. Usprkos tome, radit ćemo ovako: Podijelimo 10 na dva jednaka dijela, oba su 5. Njih kvadiramo, dobijemo 25. Oduzmete li, ako biste htjeli, 40 od tako dobivenih 25, kao što sam vam pokazao u poglavlju o operacijama u šestoj knjizi, ostaje ostatak  $-15$ , čiji kvadratni korijen pribrojen ili oduzet od 5 daje dijelove čiji umnožak je 40. To će biti  $5 + \sqrt{-15}$  i  $5 - \sqrt{-15}$ .“

## XXXVII. O pravilu za postuliranje negativnog

„Ako bi bilo rečeno, podijeli 10 na dva dijela čiji umnožak je 30 ili 40, očito je da je ovaj slučaj nemoguć‘c. Usprkos tome, radit ćemo ovako: Podijelimo 10 na dva jednaka dijela, oba su 5. Njih kvadiramo, dobijemo 25. Oduzmete li, ako biste htjeli, 40 od tako dobivenih 25, kao što sam vam pokazao u poglavlju o operacijama u šestoj knjizi, ostaje ostatak  $-15$ , čiji kvadratni korijen pribrojen ili oduzet od 5 daje dijelove čiji umnožak je 40. To će biti  $5 + \sqrt{-15}$  i  $5 - \sqrt{-15}$ .“

### Zadatak

$$x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = 0$$

## ○ kompleksnim brojevima

**Rafael Bombelli** (1526.–1572.): *Algebra* (1572./1929.) sadrži prvu detaljnu diskusiju kompleksnih brojeva; dokazao da *casus irreducibilis* kubne jednačbe (kad je njena diskriminanta negativna) ima (tri) realna rješenja.

# ○ kompleksnim brojevima

**Rafael Bombelli** (1526.–1572.): *Algebra* (1572./1929.) sadrži prvu detaljnu diskusiju kompleksnih brojeva; dokazao da *casus irreducibilis* kubne jednačbe (kad je njena diskriminanta negativna) ima (tri) realna rješenja.

$$x^3 = 15x + 4$$

$$u^3 + v^3 = 4, \quad uv = 5 \Rightarrow$$

$$u^6 - 4u^3 + 125 = 0,$$

$$(u^3 - 2)^2 + 121 = 0,$$

$$u^3 = 2 + \sqrt{-121}$$



## ○ kompleksnim brojevima

**Rafael Bombelli** (1526.–1572.): *Algebra* (1572./1929.) sadrži prvu detaljnu diskusiju kompleksnih brojeva; dokazao da *casus irreducibilis* kubne jednačbe (kad je njena diskriminanta negativna) ima (tri) realna rješenja.

$$x^3 = 15x + 4$$

$$u^3 + v^3 = 4, \quad uv = 5 \Rightarrow$$

$$u^6 - 4u^3 + 125 = 0,$$

$$(u^3 - 2)^2 + 121 = 0,$$

$$u^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

Bombelli je znao da  $x^3 = 15x + 4$  ima rješenje  $x = 4$ , pa je zapisao  $u^3 = 2 + \sqrt{-121}$  i iz toga izračunao  $v^3 = 4 - u^3 = 2 - \sqrt{-121}$  i stoga

$$x = u + v = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

$$x = u + v = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$$

Ako lijevi izraz uopće ima smisla, onda mora biti

$$\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = a \pm b\sqrt{-1}:$$

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \quad /^3$$

$$x = u + v = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$$

Ako lijevi izraz uopće ima smisla, onda mora biti

$$\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = a \pm b\sqrt{-1}:$$

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \quad /^3$$

$$2 + \sqrt{-121} = a(a^2 - 3b^2) + b(3a^2 - b^2)\sqrt{-1},$$

$$2 = a(a^2 - 3b^2), \quad 11 = b(3a^2 - b^2),$$

$$a = 2, \quad b = 1$$

Bombelli je i opisao pravila računanja s kompleksnim brojevima. Imaginarne brojeve je zapisivao kao kvadratne korijene negativnih brojeva te je dao pravila za njihovo zbrajanje, oduzimanje i množenje, npr. „plus od minusa puta plus od minusa je minus” ( $+\sqrt{-n} \cdot +\sqrt{-n} = -n$ ).

Bombelli je i opisao pravila računanja s kompleksnim brojevima. Imaginarne brojeve je zapisivao kao kvadratne korijene negativnih brojeva te je dao pravila za njihovo zbrajanje, oduzimanje i množenje, npr. „plus od minusa puta plus od minusa je minus” ( $+\sqrt{-n} \cdot +\sqrt{-n} = -n$ ).

- Descartes, 17. st.: imaginarni brojevi
- Euler, 18. st.:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

- C. Wessel, C. F. Gauß i J. R. Argand, prijelaz 18.719. st.: geometrijska interpretacija (kompleksna ravnina)

# O kubnim jednačbama s realnim koeficijentima

Moderno:

$$x^3 + bx + c = 0$$

$$x = u + v, \quad u^3 + v^3 = -c, \quad uv = -\frac{b}{3}.$$

# O kubnim jednačbama s realnim koeficijentima

Moderno:

$$x^3 + bx + c = 0$$

$$x = u + v, \quad u^3 + v^3 = -c, \quad uv = -\frac{b}{3}.$$



# O kubnim jednačbama s realnim koeficijentima

Moderno:

$$x^3 + bx + c = 0$$

$$x = u + v, \quad u^3 + v^3 = -c, \quad uv = -\frac{b}{3}.$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = ((x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1))^2 = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c - 27c^2 + 18abc$$

- Tri realna rješenja ( $D > 0$ ).
- Dva realna rješenja ( $D = 0$ ).
- Jedno realno rješenje i dva kompleksno konjugirana ( $D < 0$ ).

## Cardano nakon *Ars Magnae*

Godine 1546. Cardanu je umrla supruga. U narednom razdoblju se uz odgoj djece bavio raznim stvarima i postajao sve slaviji po svom medicinskom znanju. Tako je 1550. izdao *De subtilitate*, pregled znanja 16. st.

## Cardano nakon *Ars Magnae*

Godine 1546. Cardanu je umrla supruga. U narednom razdoblju se uz odgoj djece bavio raznim stvarima i postajao sve slaviji po svom medicinskom znanju. Tako je 1550. izdao *De subtilitate*, pregled znanja 16. st.

1552. je prihvatio molbu škotskog nadbiskupa Johna Hamiltona iz Edinburgha da ga posjeti i izliječi od astme. Pri povratku se zaustavio i u Engleskoj, gdje je kralju Edwardu VI. izradio horoskop, koji se ispostavio netočnim.

## Cardano nakon *Ars Magnae*

Godine 1546. Cardanu je umrla supruga. U narednom razdoblju se uz odgoj djece bavio raznim stvarima i postajao sve slaviji po svom medicinskom znanju. Tako je 1550. izdao *De subtilitate*, pregled znanja 16. st.

1552. je prihvatio molbu škotskog nadbiskupa Johna Hamiltona iz Edinburgha da ga posjeti i izliječi od astme. Pri povratku se zaustavio i u Engleskoj, gdje je kralju Edwardu VI. izradio horoskop, koji se ispostavio netočnim.

U to doba susreće se i s kritikama svojih djela, no nastavio je raditi kao profesor medicine do umirovljenja 1557.

Starijem je sinu 1560. odrubljena glava jer je arsenom u kolaču otrovao ženu.

Cardano se povukao u Paviju pa u Bolognu. Tu ga je 1669. drugi sin, ovisnik o kocki, okrao te je protjeran iz Bologne.

Cardano se povukao u Paviju pa u Bolognu. Tu ga je 1669. drugi sin, ovisnik o kocki, okrao te je protjeran iz Bologne. 1570. biva uhićen zbog objave horoskopa Isusa Krista. Nakon par mjeseci je oslobođen, ali uz zabranu javnih predavanja i izdavanja djela. Uz pomoć prijatelja i pape Pia V. dobio je mirovinu. Potkraj života napisao je *De propria vita*, vrstu autobiografije. U to doba od sifilisa mu je umrla i kćer.

Cardano se povukao u Paviju pa u Bolognu. Tu ga je 1669. drugi sin, ovisnik o kocki, okrao te je protjeran iz Bologne.

1570. biva uhićen zbog objave horoskopa Isusa Krista. Nakon par mjeseci je oslobođen, ali uz zabranu javnih predavanja i izdavanja djela. Uz pomoć prijatelja i pape Pia V. dobio je mirovinu.

Potkraj života napisao je *De propria vita*, vrstu autobiografije. U to doba od sifilisa mu je umrla i kćer.

Prema legendi, izradio je horoskop po kojem je trebao umrijeti 20. rujna 1576. te se taj dan ubio kako bi održao reputaciju točne izrade horoskopa.

Uz *Ars Magna*, glavno matematičko djelo mu je *Liber de Ludo Aleae* (objavljeno tek 1663.).