O nekim metodičkim problemima u obradi standardizacije normalne slučajne varijable

9. kongres nastavnika matematike Republike Hrvatske

doc.dr.sc. Mandi Orlić Bachler i mr.sc. Bojan Kovačić

5. srpnja 2022.

Sažetak

U nastavi vjerojatnosti i statistike na svim stručnim studijima u pravilu se obrađuje normalna slučajna varijabla, odnosno normalna razdioba. Pritom se kao jedan od osnovnih rezultata iskazuje (uglavnom bez dokaza) teorem o standardizaciji normalne slučajne varijable.

U radu se razmatraju i komentiraju osnovni problemi koje studenti imaju s razumijevanjem iskaza i dokaza toga teorema, a koje su autori uočili na temelju svojih višegodišnjih nastavnih iskustava.

Teorem o standardizaciji normalne slučajne varijable

Problem: Neka su X neprekidna slučajna varijabla, f_X njezina funkcija gustoće vjerojatnosti, te $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, proizvoljne, ali fiksirane konstante. Odredite funkciju gustoće vjerojatnosti f_Y slučajne varijable $Y = a \cdot X + b$.

Rješenje: Funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom $g(x) = a \cdot x + b$ je strogo monotona bijekcija za koju je:

- inverz: $g^{-1}(x) = \frac{1}{a} \cdot x - \frac{b}{a}$
- prva derivacija: $g'(x) = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Teorem o standardizaciji normalne slučajne varijable

Iz definicije funkcije gustoće $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{f_x\left(g^{-1}(y)\right)}{|g'(g^{-1}(y))|}, \forall y \in \mathrm{B} \\ 0, \text{inače} \end{cases}$

dobvamo da je funkcija gustoće $f_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_Y(y) = \frac{f_x\left(\frac{1}{a} \cdot x - \frac{b}{a}\right)}{|a|} = \frac{1}{|a|} \cdot f_x\left(\frac{1}{a} \cdot x - \frac{b}{a}\right)$$

Komentar: Najčešći problemi koji se javljaju prilikom rješavanja problema:

- značenje pretpostavke $a \neq 0$,
- određivanje inverza polinoma 1. stupnja.

Teorem 1. Teorem o standardizaciji normalne slučajne varijable: Neka su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ proizvoljne, ali fiksne konstante. Neka su $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ normalna slučajna varijabla i F_x njezina funkcija razdiobe vjerojatnosti. Definiramo slučajnu varijablu:

$$Y = \frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma}$$

Tada je $Y \sim N(0, 1)$ i za njezinu funkciju razdiobe vjerojatnosti F_Y vrijedi jednakost:

$$F_X(x) = F_Y\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

Dokaz:

Zbog pretpostavki $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana kao $g(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot x - \frac{\mu}{\sigma}$ je strogo monotona bijekcija.

1. pokazat ćemo da je slučajna varijabla Y standardna normalna slučajna varijabla
   Prema definiciji normalne slučajne varijable, dovoljno je dokazati da je funkcija gustoće slučajne varijable Y zadana pravilom $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$.
   Pretpostavimo da je funkcija gustoće normalne slučajne varijable X zadana pravilom $f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Dokaz:

Za $(a, b) = \left(\frac{1}{\sigma}, -\frac{\mu}{\sigma}\right)$ dobivamo:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\frac{1}{\sigma}} \cdot f_X\left(\frac{1}{\frac{1}{\sigma}} \cdot y - \frac{\frac{-\mu}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) \\ &= \sigma \cdot f_X\left(\sigma \cdot y + \mu\right) \\ &= \sigma \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(\sigma \cdot y + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\sigma^2 \cdot y^2}{2 \cdot \sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} \end{aligned}$$

Dokaz.

2. dokazat ćemo da vrijedi jednakost $F_X(x) = F_Y\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \forall x \in \mathbb{R}$
   Znamo da je $Y = \frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma}$, pa slijedi $X = \sigma \cdot Y + \mu$.
   Iz definicije funkcije razdiobe vjerojatnosti varijable X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t) \cdot dt$$

   slijedi:

$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X \leq x) &= P\left(\sigma \cdot Y + \mu \leq x\right) \\ &= P\left(Y \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ &= F_Y\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\square$

Teorem o standardizaciji normalne slučajne varijable

Analogno kao i teorem 1. dokazuje se općenitiji teorem:

Teorem 2. Neka su $b, \mu \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ i $\sigma > 0$ proizvoljne, ali fiksne konstante. Neka su $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ normalna slučajna varijabla i F_x njezina funkcija razdiobe vjerojatnosti. Definiramo slučajnu varijablu:

$$Y = a \cdot X + b$$

Tada je $Y \sim N\left(a \cdot \mu + b, a^2 \cdot \sigma^2\right)$ i za njezinu funkciju razdiobe vjerojatnosti F_Y vrijedi jednakost:

$$F_X(x) = F_Y(a \cdot x + b), \forall x \in \mathbb{R}$$

Komentar - Teorem o standardizaciji normalne slučajne varijable

Komentar: Od iskaza teorema studenti u pravilu zapamte samo $F_X(x) = F_Y\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \forall x \in \mathbb{R}$ jer tu jednakost primjenjuju u rješavanju zadataka.

Zato im je potrebno naglsiti sljdeće:

1. "Linearna funkcija čuva normalnost slučajne varijable" - kompozicija polinoma 1. stupnja i normalne slučajne varijable je ponovno normalna slučajna varijabla
   Važnost ovog zaključka ogleda se u dokazu dijela teorema 2.

Komentar - Teorem o standardizaciji normalne slučajne varijable

Dokaz.
Neka su $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ i Y slučajna varijabla definirana s $Y = a \cdot X + b$.

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b = a \cdot \mu + b \\
\sigma(Y) &= |a| \cdot \sigma(X) = |a| \cdot \sigma
\end{aligned}
$$

Dakle, $Y \sim N\left(a \cdot \mu + b, a^2 \cdot \sigma^2\right)$ □

Definicija: Neka su X neprekidna slučajna varijabla i f_X njezina funkcija gustoće vjerojatnosti. Tada su očekivanje $E(X)$ i standardna devijacija $\sigma(X)$ varijable X definirani formulama:

$$
E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) \cdot dx, \quad \sigma(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f_X(x) \cdot dx}
$$

Vrijede sljdeća svojstva:

- za $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$: $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b, \quad \sigma(a \cdot X + b) = |a| \cdot \sigma(X)$
- ako je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onda su $E(X) = \mu$, $\sigma(X) = \sigma$

Komentar - Teorem o standardizaciji normalne slučajne varijable

Komentar: Većina studenata ne zna objasniti zašto gornji "dokaz" ne predstavlja valjan dokaz teorema 2. (odnosno, za $(a, b) = \left(\frac{1}{\sigma}, -\frac{\mu}{\sigma}\right)$ dokaz teorema 1.) Oni ne uočavaju da gornji "dokaz" zapravo dokazuje (samo) da je Y neka slučajna varijabla koja ima očekivanje $a \cdot \mu + b$ i standardnu devijaciju $|a| \cdot \sigma$ i da nije nužno normalna.

Ni iz jednoga njegovoga dijela ne slijedi da je Y normalna slučajna varijabla.

Ovaj primjer pokazuje koliko je važno u cijelosti razumjeti što sve izriče neka matematička tvrdnja koju je potom potrebno dokazati.

Komentar - Teorem o standardizaciji normalne slučajne varijable

2. Pravilo $g(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot x - \frac{\mu}{\sigma}$ ovisi o parametrima polazne normalne slučajne varijable (za različit izbor (μ, σ) dobivamo različita pravila funkcije g), ali kompozicija te funkcije i polazne normalne slučajne varijable ne ovisi o tim parametrima. Teorem 2. pokazuje da takav zaključak ne vrijedi za bilo koji polinom 1. stupnja.

Komentar - Teorem o standardizaciji normalne slučajne varijable

Da li dokaz teorema 1. "izlazi iz okvira gradiva predmeta"?

1. Da, ako studenti prethodno nisu odslušali barem jedan matematički kolegij koji obuhvaća osnove diferencijalnoga i integralnoga računa.
2. U suprotnom, ne. Na temelju vlastitih višegodišnjih nastavnih iskustava tvrdimo da je taj dokaz jedan od tipičnih primjera povezivanja srednjoškolske algebre, matematičke analize i osnovnih pojmova teorije vjerojatnosti.
   Upravo u spomenutom povezivanju, ali i nedovoljnu znanju i razumijevanju tih pojmova leže osnovni problemi koje studenti imaju s razumijevanjem iskaza i dokaza teorema 1.

Primjena teorema o standardizaciji normalne slučajne varijable

"Praktična" primjena teorema 1., odnosno jednakosti $F_X(x) = F_Y\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ odnosi se na rješavanje zadataka u kojima se traži određivanje vjerojatnosti $P\left(X \leq x\right)$ za neki "konkretan" $x \in \mathbb{R}$.

U praksi nastava se izvodu u obliku predavanja i auditornih vježbi, pa pri rješavanju takvih zadataka nije moguće koristiti računalo, već se koriste tablice vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti standarne normalne slučajne varijable.

Ovakva praksa uzrokuje na pogrešnu percepciju studenata da je efektivno značajna samo standardna normalna slučajna varijabla, odnosno da bez provedenoga postupka standardizacije u praksi nije moguće odrediti nijednu vrijednost funkcije razdiobe vjerojatnosti proizvoljne normalne slučajne varijable.

Primjena teorema o standardizaciji normalne slučajne varijable

Primjer 1. Neka je $X \sim N\left(10, 5.5^2\right)$. Odredite vjerojatnost da varijabla X poprimi vrijednost između 8 i 13.

1. "klasično" rješenje

Koristeći izraz $F_x(x) = F_y\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ i tablicu vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti F^* standarne normalne slučajne varijable dobivamo:

$$
\begin{aligned}
P\left(8 \leq x \leq 13\right) = F(13) - F(8) &= F^*\left(\frac{13-10}{5.5}\right) - F^*\left(\frac{8-10}{5.5}\right) \\
&\approx F^*(0.55) - F^*(-0.36) \\
&= F^*(0.55) - (1 - F^*(0.36)) \\
&= 0.70884 + 0.64058 - 1 = 0.34942
\end{aligned}
$$

Primjena teorema o standardizaciji normalne slučajne varijable

2. rješenje pomoću MS Excela - `NORM.DIST.`

```
=NORM.DIST(13;10;5,5;1) - NORM.DIST(8;10;5,5;1)
```

Dobiveni rezultat je 0,349214748

3. rješenje pomoću MATLAB-a - `normcdf.`

```
normcdf(13,10,5.5) - normcdf(8,10,5.5)
ans =
0.349214748287754
```

4. rješenje pomoću Maxime - `cdf_normal`

```
load(distrib)$
cdf_normal(13,10,5.5) - cdf_normal(8,10,5.5)
0.34921474828775
```

Primjena teorema o standardizaciji normalne slučajne varijable

Komentar:

U rješenjima 2. - 4. nismo provodili standardizaciju zadane normalne slučajne varijable. Studenti uobičajeno smatraju da je ta standardizacija implementirana u računalnom programu - što nije točno.

Naime, funkcije $f_x(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ i $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$ nisu elementarno integrabilne, pa za računanje određenih i nepravih integrala računala koriste neku od metoda numeričke matematike namijenjenih približnom određivanju određenoga integrala. Zbog toga je računalnom programu potpuno svejedno hoće li vrijediti jednakost $(\mu, s) = (0, 1)$ ili će vrijednosti μ i s biti neki drugi realni brojevi $(s > 0)$.

Hvala na pažnji !