HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

9. KONGRES NASTAVNIKA MATEMATIKE REPUBLIKE HRVATSKE

Zagreb, 5. – 6. srpnja 2022.

STRUČNA SEKCIJA

O KAMATNJACIMA – MATEMATIČKI

Ivo Baras, Renata Kožul Blaževski

ibaras@oss.unist.hr, rkozulb@oss.unist.hr

Sveučilište u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije

U stabilnim ekonomskim prilikama, s niskom inflacijom i malim kamatnim stopama, tolerira se činjenica da različiti načini obračuna složenih kamata rezultiraju različitim iznosima kamata. Međutim, u turbulentnijim vremenima raste potreba za matematički točnim izračunom kamata. Navedeno se može sagledati sa stajališta potrošača (štediša ili korisnika kredita), ekonomske teorije, ali i iz perspektive matematičara.

Prema principu ekvivalencije kapitala, vrijednost kapitala u određenom trenutku i vrijednost kapitala u nekom budućem trenutku su ekvivalentne ako je kapitalizirana vrijednost prvog kapitala za promatrano vremensko razdoblje jednaka vrijednosti drugog kapitala, uz pretpostavku da je kamatna stopa fiksna, a kapitalizacija složena (Šego, 2005).

Nejednakost konačne vrijednosti uloga primjenom proporcionalne (relativne) kamatne stope i konačne vrijednosti istog tog uloga primjenom nominalne kamatne stope kod složenog kamatnog računa i u slučaju kada razdoblje ukamaćivanja nije jednako razdoblju na koje se odnosi nominalna kamatna stopa, dovodi do povrede principa ekvivalencije kapitala. Kod konformnog načina obračuna kamata i pri složenom ukamaćivanju to nije slučaj. Ovaj problem ilustriran je u radu na primjeru iz konkretne bankovne prakse.

Do povrede principa ekvivalencije kapitala dolazi i pri izvođenju formule za neprekidno ukamaćivanje, stoga se u radu analiziraju njeni nedostatci. U radu se izvodi formula za konforman obračun kamata ako je kamatnjak varijabilan, tj. ako je kamatnjak funkcija vremena. Konačno, ilustrira se primjena te formule u raznim situacijama.

Održavajući kolegije gospodarske (poslovne) matematike, matematičari se često osjećaju kao da igraju na gostujućem terenu. Ovaj je rad pokušaj da se ekonomski pojmovi prokomentiraju na matematički način.

Ključne riječi: konformno, kontinuirano, proporcionalno, varijabilno ukamaćivanje

Literatura:

1. Šego, B. (2005): Matematika za ekonomiste, Narodne novine, Zagreb

2. Šego B., Lukač Z. (2011): Financijska matematika, RRIF plus, Zagreb

3.https://arhiv.slobodnadalmacija.hr/pvpages/pvpages/viewPage/?pv_page_id=36635&pv_issue_no=850124_A (19.4.2022.)

TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE I NJIHOVA PRIMJENA

Maja Čuletić Čondrić, Marijana Špoljarić, Sandi Kovač

mccondric@unisb.hr, marijana.spoljaric@vuv.hr, sandi.kovac@vuv.hr

Sveučilište u Slavonskom Brodu, Veleučilište u Virovitici

Proučavanje odnosa između osnovnih elemenata trokuta, tj. kutova i stranica trokuta traje više od dva tisućljeća. Povijesni početci kreću još od Babilona i Egipta te mjerenja i konstrukcije egipatskih piramida. Većina takvih omjera ne može se izraziti algebarskim operacijama, zbog čega je uvedena trigonometrija. Geometrija je najstarija grana matematike, a njoj je temelj trigonometrija. Trigonometriju dijelimo na sfernu i ravninsku. Osnovna karakteristika trigonometrijskih funkcija je definirati pravokutan trokut te prepoznati vezu između kutova i stranica trokuta.

Za definiciju trigonometrijskih funkcija potrebno je poznavanje brojevne kružnice te namatanje pravca na kojemu je označena mjera kuta na brojevnu kružnicu. Trigonometrijske funkcije nazivaju se još kružne ili cirkularne funkcije. (Kurepa, 1975.) Trigonometrijske funkcije prikazuju se i pomoću grafova sinusoide, kosinusoide, tangensoide i kotangensoide. Pomoću grafova osnovnih trigonometrijskih funkcija mogu se iščitati njihove karakteristike poput perioda funkcije, nul-točke, maksimuma i minimuma funkcije te amplitude funkcije. Ako se zna vrijednost jedne trigonometrijske funkcije, mogu se izračunati preostale nepoznate vrijednosti trigonometrijskih funkcija. (Dakić, Elezović, 2005.) Neizostavni pojmovi u trigonometriji su sinusov i kosinusov poučak te primjena trigonometrijskih identiteta za brži i kraći izračun traženog podatka.

Primjena trigonometrijskih funkcija vrlo je široka. Kroz primjere autori će prikazati njihovu primjenu u fizici, računarstvu, strojarstvu, geodeziji, elektrotehnici, astronomiji, arhitekturi, pomorstvu i mnogim drugim granama. Trigonometrija se javlja na sportskim terenima, kao i na bilijarskom stolu za opis putanje lopte odnosno kugle, ali i u glazbenoj teoriji. Za primjenu trigonometrije u svakodnevnom životu potrebno je poznavanje planimetrije i stereometrije. (Kolak, 2019.) Također je jako važno, nakon pročitanog tekstualnog zadatka, sve podatke pretvoriti u grafički prikaz, tj. grafički modelirati zadatak i povezati trigonometrijske pojmove pri rješavanju zadatka.

Ključne riječi: primjena trigonometrijskih funkcija, trigonometrija, trokut

Literatura:

1. Dakić, B., Elezović, N. (2005): Matematika 3, Udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazije. Zagreb: Element
2. Kolak, B. (2019): Trigonometrija u strojarstvu, Završni rad, Veleučilište u Slavonskom Brodu
3. Kovač, S. (2021): Trigonometrijske funkcije u elektrotehnici, Završni rad, Veleučilište u Virovitici
4. Kurepa, S. (1975): Matematička analiza 1, Tehnička knjiga, Zagreb

MJERE POUZDANOSTI U ONLINE VREDNOVANJU

Blaženka Divjak, Mihaela Bosak, Petra Žugec

bdivjak@foi.hr, mlaljek@foi.hr, pzugec@foi.hr

Fakultet organizacije i informatike

Zbog pandemije COVID-a obrazovne institucije diljem svijeta (pa tako i u Republici Hrvatskoj) privremeno su zatvorile svoje zgrade i učionice. To je rezultiralo brzim prelaskom na učenje i poučavanje na daljinu te online vrednovanje. Veliki izazov je u hibridnom ili potpuno online modelu osigurati i održati kvalitetnu nastavu matematike, posebno prilikom uvođenja novih koncepata koji su studentima zahtjevni. Posebno je zahtjevna priprema, organizacija i provođenje online vrednovanja koje mora udovoljavati stručnim i metodičkim zahtjevima, ali i biti vjerodostojno.

Kritički ispitujemo ulogu učenja na daljinu i online vrednovanja u stjecanju znanja, vještina i stavova. Zalažemo se za konstrukciju cjelovitog programa vrednovanja s pomno pripremljenim skupom metoda vrednovanja, ali i njegovu evaluaciju prema sveobuhvatnom okviru. U tu svrhu odabrali smo takozvani *Model korisnosti vrednovanja* koji su uveli Van der Vleuten i Schurwith (2005). Spomenuti model sadrži 5 kriterija: pouzdanost, valjanost i prihvatljivost vrednovanja, utjecaj vrednovanja na učenje, te troškovi modela vrednovanja.

Fokus našega rada je na pouzdanosti koju vrlo općenito shvaćamo kao razinu točnosti odluka za prolaz i neuspjeh. Analizu pouzdanosti provodimo na razini ispita, ali i na razini cijelog programa vrednovanja za pojedini predmet. Preciznije, konstruiramo kompozitni indeks za program vrednovanja na razini cijelog predmeta na dva načina. Taj kompozitni indeks predstavlja moguću mjeru pouzdanosti cijelog programa vrednovanja. Za testiranje modela koristili smo analitike učenja dostupne u sustavu za upravljanje e-učenjem (Moodle) za posljednjih nekoliko akademskih godina. Podatke o rezultatima vrednovanja analizirali smo uz pomoć statistika testa u Moodleu te odredili koeficijent interne konzistentnosti (tzv. Crombach alpha) na razini pojedinog dijela u planu vrednovanja (npr. za kolokvij) koje smo zatim težinski usrednjili. Statistike testa u Moodleu omogućavaju upotrebu i drugih parametra kvalitete ispitnih zadataka na razini testa, ali i na razini pojedinog pitanja.

Ključne riječi: e-učenje, online vrednovanje, pouzdanost, statistike testa

Literatura:

1. Straub, D. Boudreau, M.-C., Gefen, D. (2004): Validation Guidlines for IS Positivist Research, Communications of the Association for Information Systems, br. 13, str. 380-427.

2. Van der Vleuten, C.P.M., Schurwith, L.W.T. (2005): Assessing professional competence: from methods to programmes, Medical Education, br. 39, str. 309-317.

O nekim metodičkim problemima u obradi standardizacije normalne slučajne varijable

doc. dr. sc. Mandi Orlić Bachler, viši predavač
mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač

morlic1@tvz.hr, bkovacic@tvz.hr

Tehničko veleučilište u Zagrebu

U nastavi vjerojatnosti i statistike na svim stručnim studijima u pravilu se obrađuje normalna slučajna varijabla, odnosno normalna razdioba. Pritom se kao jedan od osnovnih rezultata iskazuje sljedeći teorem.

Teorem 1. (*Teorem o standardizaciji normalne slučajne varijable*) Neka su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ proizvoljne, ali fiksirane konstante. Neka su $X : N\left(\mu, \sigma^2\right)$ normalna slučajna varijabla i F njezina funkcija razdiobe vjerojatnosti. Definiramo slučajnu varijablu

$$Y = \frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma}.$$

Tada je $Y : N(0,1)$ i za njezinu funkciju razdiobe vjerojatnosti F^* vrijedi jednakost:

$$F(x) = F^*\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dokaz ovoga teorema najčešće se ili uopće ne navodi (zbog čega se dobiva pogrešan dojam da je riječ o „teškom dokazu koji izlazi iz okvira predmeta“) ili se samo kratko komentira (bez cjelovitoga navođenja).

Radi potpunosti, u radu se za proizvoljnu neprekidnu slučajnu varijablu X zadanu svojom funkcijom gustoće f i strogo monotonu derivabilnu bijekciju g najprije definira funkcija gustoće varijable $g(X)$. Potom se dokazuje teorem 1.

U radu se ističe da teorem 1. nije teorem čiji dokaz „izlazi iz okvira predmeta“ Vjerojatnost i statistika, nego zapravo jedan od tipičnih primjera teorema čiji dokaz zahtijeva povezivanje osnovne srednjoškolske algebre, matematičke analize i osnovnih definicija teorije vjerojatnosti. Upravo u spomenutom povezivanju, ali i nedovoljnu znanju i razumijevanju tih pojmova leže osnovni problemi koje studenti imaju s razumijevanjem iskaza i dokaza teorema 1., a koje su autori uočili na temelju svoga višegodišnjeg iskustva u držanju nastave vjerojatnosti i statistike na stručnim studijima.

Posebno se komentira pogrešno shvaćanje studenata da efektivno „postoji samo jedna značajna normalna slučajna varijabla", odnosno da bez prethodne standardizacije u praksi nije moguće odrediti vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti bilo koje normalne slučajne varijable. Na konkretnom primjeru riješenom pomoću računalnih programa MS Excela i MATLAB-a pokazuje se da navedeni računalni programi vrlo korektno provode izračune vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti bilo koje normalne slučajne varijable bez njezine prethodne standardizacije.

Zaključno se komentira da je teorem 1. praktično koristan uglavnom u slučaju kad se vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti bilo koje normalne slučajne varijable određuju korištenjem tablica vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable (bez korištenja računalnih programa poput MS Excela, MATLAB-a i dr.).

Ključne riječi: funkcija razdiobe vjerojatnosti, normalna slučajna varijabla, standardizacija

Literatura:

1. M. Benšić, N. Šuvak (2013): Uvod u vjerojatnost i statistiku, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek.
2. N. Elezović (2018): Vjerojatnost i statistika, Element, Zagreb.
3. M. Orlić, T. Perkov (2014.): Repetitorij matematike za studente graditeljstva, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb.
4. S. Suljagić (2003): Vjerojatnost i statistika, skripta, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb.

O nekim standardnim problemima u obradi postotnoga računa

mr. sc. Milan Papić, viši predavač, Sveučilište Libertas, mpapic@libertas.hr

mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač, Tehničko veleučilište u Zagrebu, bkovacic@tvz.hr

Nastava gospodarske/poslovne matematike na ekonomskim stručnim studijima koji se izvode na našim veleučilištima i samostalnim visokim školama uobičajeno započinje obradom postotnoga računa (od sto, više sto i niže sto). Taj se račun potom primjenjuje pri modeliranju problema jednostavnoga odnosno složenog kamatnog računa i njihovih primjena.

Pri rješavanju zadataka iz ovoga gradiva većina studenata nastoji koristiti „gotove“ formule bez ikakva promišljanja o njihovu značenju. Time se zapravo gubi smisleni kontekst postotnoga računa, a rješavanje zadataka predviđenih ishodima učenja predmeta svodi se na prepoznavanje/ “detektiranje“ zadanih veličina i uvrštavanje u odgovarajuću formulu za izračun nepoznate veličine. Tipičan primjer sljedeći je zadatak.

Zadatak 1. Cijena proizvoda nakon poskupljenja od 20 % iznosi 600 kn. Kolika je bila cijena proizvoda prije poskupljenja?

Analogni se problemi javljaju i ako se promatra uzastopna (sukcesivna) promjena polazne (osnovne) veličine. Tipičan primjer sljedeći je zadatak.

Zadatak 2. Cijena nekoga proizvoda poveća se za 20 %. Za koliko postotaka treba sniziti novu cijenu da se dobije početna?

U radu se izlažu i komentiraju najčešći problemi studenata pri modeliranju zadataka iz postotnoga računa, koje su autori uočili na temelju svojega višegodišnjega nastavnoga iskustva. Ti se problemi izlažu na konkretnim tipovima zadataka koji se uobičajeno rješavaju na redovnoj nastavi i zadaju na pisanim provjerama znanja. Radi potpunosti izlaganja, uz svaki zadatak navodi se i njegovo ispravno rješenje koje se očekuje od studenta-rješavača u skladu s postavljenim ishodima učenja i ciljevima predmeta.

Poseban naglasak stavlja se na problem razumijevanja pojma *relativne* promjene osnovne veličine, odnosno modeliranja zadataka u kojima su zadane (samo) takve promjene. Na primjeru zadatka postavljenoga na višoj razini državne mature iz matematike pokazuje se i kako se zadatak iz postotnoga računa može alternativno modelirati koristeći linearno programiranje.

Osnovni zaključak rada je da se matematički vrlo jednostavan koncept postotnoga računa u nastavnoj praksi pokazuje kao studentima relativno zahtjevan za svladavanje i primjenu u poslovnoj praksi, ponajprije zbog problema koje većina studenata ima pri modeliranju problemskih matematičkih zadataka.

Ključne riječi: modeliranje, postotni račun, problemski zadatci

Literatura:

1. Kovačić, B., Radišić, B. (2011): Gospodarska matematika – zbirka zadataka s CD-om, Školska knjiga, Zagreb
2. Papić, M. (2018): Poslovna matematika uz primjenu MS Excela, Likarija d.o.o., Tounj
3. Relić, B. (2002): Gospodarska matematika, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb

Strategije rješavanja problemskih zadataka u financijskoj matematici

Bojan Radišić, mag. educ. math. et inf., Marijana Gašparević, studentica

bradisic@vup.hr, mgasparevic@vup.hr

Veleučilište u Požegi

U nastavi financijske matematike prilikom rješavanja problemskih zadataka studenti se najčešće koriste odgovarajućim formulama kako bi došli do konačnih rješenja. Nerijetko takav način razmišljanja dovodi do netočnih rješenja zbog „krivog“ odabira formula, sličnosti pojmova i nerazumijevanja teorijskog i praktičnog gradiva. Kako je financijska matematika širok pojam, ovdje će se govoriti o kamatnim računima i njihovoj primjeni (Kovačić et Radišić, 2011.) kao dijelu nastavnog sadržaja na veleučilištima i visokim školama.

U literaturi se studentima na klasičan način prikazuju izvodi formula (Šego, 2008.) iz poznatih matematičkih zakonitosti (aritmetički i geometrijski nizovi) te se na riješenim primjerima studenti uvode u problemske zadatke za samostalno rješavanje. Zbog brojnosti i sličnosti formula koje se koriste u financijskoj matematici studenti često imaju problema s ispravnim odabirom odgovarajućih formula. U složenijim zadatcima, gdje je potrebno koristiti nekoliko različitih formula, zbunjenost i nesigurnost još su izraženije.

U samostalnom rješavanju problemskih zadatka studentima se preporučuju dvije strategije koje olakšavaju i pomažu pronalaženju točnih rješenja. Jedna od tehnika rješavanja navedenih zadataka je i shematski prikaz zadatka. Na taj način studentima se omogućuje pregledniji i razumljiviji način prikazivanja i rješavanja zadatka uz korištenje osnovnih formula. Ova tehnika često je sporija, ali je poprilično učinkovita. Iako je shematski prikaz jako učinkovit i omogućava bolje razumijevanje financijskih zakonitosti, ima i nekih ozbiljnijih nedostataka, npr. ako se radi o velikom broju periodičnih uplata/isplata koje je gotovo nemoguće prikazati shematski.

Druga strategija podrazumijeva korištenje gotovih formula te omogućuje brže rješavanje problema. Cilj je ove strategije doći do odgovarajućih formula kroz tri osnovna koraka (Barnett et al, 2006.): 1. korak: utvrditi radi li se o jednokratnim plaćanjima ili jednakim periodičkim plaćanjima, u 2. koraku utvrditi radi li se o složenom ili jednostavnom kamatnom računu, i u 3. koraku, ako se radi o periodičkim plaćanjima, je li riječ o budućim ili sadašnjim vrijednostima. Ove korake moguće je prilagoditi i drugim problemima u financijskoj matematici, ali ovdje će se isključivo odnositi na kamatni račun. Za navedenu strategiju potrebna je priprema u obliku grafikona koji sadrži sve navedene formule. Obje navedene strategije usporedit će se na nekoliko primjera.

Iako je rad ograničen na određeni dio financijske matematike, slični načini razmišljanja mogu se primijeniti na ostale aspekte financijske matematike, ali i u drugim područjima.

Ključne riječi: kamatni račun, periodične uplate/isplate

Literatura:

1. Barnett, R. , Ziegler, M., Byleen, K. (2006): Primijenjena matematika, Mate d.o.o., Zagreb
2. Kovačić, B., Radišić, B. (2011): Gospodarska matematika - Zbirka zadataka s CD-om, Školska knjiga, Zagreb
3. Pačar, M., (2011): Gospodarska i Financijska Matematika - Udžbenik, Zbirka, Rješenja, Matematički klub Mathoteka, Zagreb
4. Šego, B. (2008): Financijska matematika, Zgombić & partneri, Zagreb
5. https://www.efzg.unizg.hr/UserDocsImages/MAT/vhorvatic/Pocetak6_dioba.pdf

ODRŽIVI RAZVOJ KROZ NASTAVU MATEMATIKE

Nada Roguljić, Julija Mardešić, Arijana Burazin Mišura

nmaroevi@oss.unist.hr , mardesic@oss.unist.hr, aburazin@oss.unist.hr

Sveučilišni odjel za stručne studije, Sveučilište u Splitu

Matematika kao znanstvena disciplina, ali i kao nastavni predmet mora imati svoju društvenu ulogu i odgovornost. U 21. stoljeću pitanje održivosti života na planetu Zemlja zapljusnulo je sve sfere života. Svijet, naš globalni dom, divno je mjesto, ali ograničenih prirodnih resursa. Ujedinjeni narodi su 2000. godine donijeli rezoluciju kojom je postavljeno 17 ciljeva održivog razvoja. Danas, kao nikad prije, uloga matematike u obrazovanju mora biti i promicanje tih ciljeva kroz matematičke teme i sadržaje. Uključivanje tema održivosti u nastavu matematike na svim razinama daje potrebni kontekst matematičkim sadržajima, koji često učenicima nedostaje ili im pak nije blizak, angažirajući u njima i onu emocionalno-iskustvenu razinu.

Na međunarodnoj sceni vidljivi su pomaci u stvaranju integriranih kurikuluma i mnogi se edukatori u području matematike bave tom problematikom te stvaraju sadržaje koji se mogu koristiti u nastavi matematike. Brojne su inicijative zaživjele u raznim obrazovnim sferama, poglavito u matematičkom obrazovanju i srodnim prirodnim i tehničkim disciplinama. Matematika planeta Zemlje 2013. (MPE 2013) inicijativa je matematičkih znanstvenih organizacija u svijetu, s ciljem iznalaženja načina na koji matematičke discipline mogu biti korisne u rješavanju globalnog svjetskog problema. Također, Ministarstvo znanosti i obrazovanja prepoznalo je taj trenutak i dalo smjernice u dokumentu „Kurikulum međupredmetne teme Održivi razvoj za osnovne i srednje škole" objavljenom 2019. godine.

Svrha rada je prikazati mogućnosti integriranja tema održivosti u kurikulume matematike na više razina školovanja i u više područja matematike. Kroz više primjera pokazat ćemo mogućnosti integracije u matematičke kolegije na stručnim studijima (Roguljić, N. et al., 2016), zatim i u nastavne teme matematike u srednjim i osnovnim školama. Ponudit ćemo nastavne scenarije kojima je konačna svrha potaknuti nastavnike na njihovo osmišljavanje i trajno razmišljanje o mogućnostima integracije u svoju nastavu.

Duboko vjerujemo da je integracija teme održivosti korisna matematici, dajući joj smisleni kontekst, a poslužit će i za postizanje ciljeva održivog razvoja kroz razvoj matematičkih kompetencija. Doslovno sva pitanja u održivom razvoju zahtijevaju matematičke vještine mjerenja, procjene, pretvorbe jedinica, skaliranja, matematičkog modeliranja rasta ili pada, korištenja numeričkih podataka u različitim analizama i razumijevanju ograničenja, kreiranja tablica, stvaranja i razumijevanja grafova... Nadamo se da ćemo ovim radom potaknuti interes onih koji vjeruju da je nastavni proces bitan korak u stvaranju bolje budućnosti.

Ključne riječi: nastava matematike, održivost, modeliranje

Literatura:

1. Roguljić, N., Burazin Mišura, A., Krčum, J. (2016): Podučavanje održivosti kroz matematičke kolegije, zbornik radova sa skupa CIET 2016.

2. http://www.sustainabilitymath.org/ (18.4.2022.)

3. https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/06/ODR_kurikulum.pdf (18. 4. 2022.)

4. https://sdgs.un.org/goals (18. 4. 2022.)

VIZUALIZACIJA MATEMATIČKE INDUKCIJE

Marijana Špoljarić, Marko Marić

marijana.spoljaric@vuv.hr, markomaric43@gmail.com

Veleučilište u Virovitici, Srednja škola Stjepana Sulimanca

U znanosti postoje dva načina zaključivanja - deduktivni i induktivni. Deduktivno zaključivanje je zaključivanje iz općega k pojedinačnom, dok je induktivno zaključivanje od pojedinačnog prema općem. Odnosno, induktivno zaključivanje proces je u kojemu se uočava uzorak, pravilo ili predviđa budućnost na temelju iskustva iz prošlosti.

Matematička indukcija omogućava dokazivanje određenog pravila ili obrasca u beskonačno. Proces matematičke indukcije temelji se na Peanovom aksiomu koji glasi:
Ako je M podskup od $\mathbb{N}$ i ako vrijedi
(i) $1 \in M$,
(ii) $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in M \Rightarrow n+1 \in M)$,
onda je $M = \mathbb{N}$.

Posljedica Peanovog aksioma princip je matematičke indukcije koji se izvodi u dva koraka. Prvi je korak osnovni korak ili baza u kojemu se pokazuje valjanost tvrdnje za jednostavne primjere, a potom slijedi drugi korak, „korak indukcije", u kojemu se na temelju pretpostavke pokazuje kako pravilo vrijedi i za proizvoljno velik primjer.

Pretpostavimo da za tvrdnju $T(n)$ (koja ovisi o prirodnom broju n) vrijedi:
(i) tvrdnja $T(1)$ je istinita;
(ii) iz istinitosti tvrdnje $T(n)$ proizlazi istinitost tvrdnje $T(n+1)$.
Tada je tvrdnja $T(n)$ istinita za svaki prirodni broj n.

U razumijevanju principa matematičke indukcije učenici i/ili studenti ponekad nailaze na poteškoće. Jedan od načina na koji im se može približiti princip matematičke indukcije jest vizualizacija. Kroz vizualne primjere prikazat će se princip matematičke indukcije. Ovi primjeri mogu nastavnicima/profesorima pomoći u motivaciji učenika/studenata pri obradi sadržaja. Isto tako mogu se iskoristiti i za studentske projekte i poticanje na samostalni rad.

Ključne riječi: aktivno učenje, matematička indukcija, vizualizacija

Literatura:

1. Alsina, C., Nelsen, R.B. (2006): Math Made Visual Creating Images for Understanding Mathematics, The Mathematical Association of America, Washington
2. Gunderson, D.S. (2011): Handbook of mathematical induction, theory and applications, Chapman & Hall Group, NW
3. https://www.youtube.com/watch?v=5Hn8vUE3cBQ (16.03.2022.)

MATEMATIČKO MODELIRANJE STVARNOSTI POMOĆU FUNKCIJA – VERTIKALNI PROCES

Marijana Špoljarić, Sanela Jukić, Ana Borbaš Bajivić

marijana.spoljaric@vuv.hr, sanela.jukic@skole.hr, aborbas7@gmail.com

Veleučilište u Virovitici, OŠ Eugena Kumičića, Strukovna škola Virovitica

Ostvarivanje ishoda u nastavnom procesu temelj je današnjeg obrazovanja - od osnovnoškolskog preko srednjoškolskog do visokoškolskog. Pri tome nastavnici mogu na bilo koji način to postići. Za osmišljavanje nastavnog sata u sve tri razine obrazovanja od iznimne je važnosti kreativnost i istraživanje kako i na koji način ostvariti postavljeni ishod.

Matematika je predmet koji od konkretnih situacija kreće prema apstraktnima i temelji se na povezivanju prethodno stečenog znanja učenika odnosno studenta. Konkretne situacije opisuju se matematičkim modelima. Na temelju njih učenike i/ili studente uvodi se u određeno područje te motivira i/ili se kao vrhunac naučenog primjenjuje stečeno znanje u opisivanju matematičkog modela. Reformom školskog sustava u matematici se želi postići što veća spremnost učenika za primjenu stečenog znanja u konkretnim situacijama.

Funkcija je pojam koji se uvodi u u osmom razredu osnovne škole. Prije toga učenici se susreću s modeliranjem problema primjenom funkcije kroz rješavanje problema. Učenici u osnovnim školama moraju naučiti modelirati problemske situacije, uočiti bitno, naučiti postaviti korake rješavanja problema te analizirati dobiveno rješenje, a to znači kako njihovi učitelji moraju biti ti koji će pronalaziti njima bliske životne probleme, stavljati ih u kontekst njihovih sposobnosti, ali najbitnije je naučiti ih rješavati probleme primjenjujući matematičko znanje.

U srednjoj školi, ovisno o programu, učenici se s primjenom funkcije u modeliranju susreću u sve četiri godine školovanja. U prvom razredu u problemskim situacijama trebaju prepoznati linearnu ovisnost, zapisati je kao funkciju, primijeniti za analizu problema i analizirati primjenom grafičkog prikaza. Primjena linearne funkcije nastavlja se i u drugom razredu te se znanje proširuje kvadratnom funkcijom, dok se u trećem razredu analiziraju eksponencijalna, logaritamska i trigonometrijske funkcije te problemi koje one opisuju. U četvrtom razredu učenici nabrajaju elementarne funkcije i navode njihova svojstva (domenu, kodomenu, sliku, parnost /neparnost, periodičnost, monotonost i ograničenost funkcije).

Iako u visokom školstvu postoje razlike u sadržaju predmeta Matematika, ono što je većini zajedničko je sistematizacija elementarnih funkcija i njihova primjena u struci.

Autori će u ovom radu pojam funkcije i elementarnih funkcija vertikalno prikazati primjenom u konkretnim situacijama, od osnovnoškolske razine do visokoškolske. Pri tome je najveći naglasak na razlikama u metodičkom pristupu s obzirom na stupanj obrazovanja.

Ključne riječi: funkcije, matematički modeli, metodika

Literatura:

1. Barnett, R.A., Ziegler, M.R., Bylen, K.E. (2006): Primijenjena matematika za poslovanje, ekonomiju, znanost o živom svijetu i humanističke znanosti, MATE, Zagreb
2. Dym, C.L. (2004): Principles of Mathematical Modeling, Second Edition, ELSEVIER, London
3. Ivan Matić, Maja Zelčić, Milena Šujansky,Tanja Vukas, Željka Dijanić: MATEMATIKA 4 - udžbenik matematike u četvrtom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje - 3 i 4 sata tjedno – 1 dio
4. Reusser, K., Stebler, R. (1997): Every word problem has a solution – the social rationality of mathematical modelling in schools, Learning and Instruction, 7, br. 4, str. 309-327.
5. Šikić, Z., Žitko, V. D. , Jakopović, I. G., Goleš, B., Lobor, Z., Marić., M., Nemeth, T., Stajčić, G., Vuković, M. (2020.): Udžbenik matematike za sedmi razred osnovne škole, Profil Klett, Zagreb
6. Šikić, Z., Žitko, V. D. , Jakopović, I. G., Goleš, B., Lobor, Z., Marić., M., Nemeth, T., Stajčić, G., Vuković, M. (2020.): Udžbenik matematike za osmi razred osnovne škole, Profil Klett, Zagreb
7. Babić, M., Belavić, D., Markičević, M.Ć., Dika, A., Fofonjka, M., Jukić, S., Vuković, A. M. (2020.): IZZI digitalni obrazovni sadržaji, Profil Klett, Zagreb