DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Dubrovnik, 3. travnja 2013.

Zadatak A-1.1.

Odredi sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned}
x^2 - y &= z^2 \\
y^2 - z &= x^2 \\
z^2 - x &= y^2.
\end{aligned}$$

Prvo rješenje.

Zbrajanjem ovih jednadžbi dobivamo

$$x + y + z = 0.$$

Odavde slijedi $z = -x - y$ i iz prve jednadžbe dobivamo

$$\begin{gathered}
x^2 - y = (-x - y)^2 \\
x^2 - y = x^2 + 2xy + y^2 \\
2xy + y^2 + y = 0 \\
y(2x + y + 1) = 0
\end{gathered}$$

pa je $y = 0$ ili $2x + y + 1 = 0$.

Ako je $y = 0$, slijedi $z = -x$ pa iz druge (ili treće) jednadžbe imamo $x(x - 1) = 0$, odakle je $x = 0$ ili $x = 1$. Odgovarajuća rješenja su $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ i $(x, y, z) = (1, 0, -1)$.

Ako je $2x + y + 1 = 0$ vrijedi $y = -2x - 1$ pa imamo $z = -x - y = x + 1$. Uvrštavanjem u treću jednadžbu dobivamo $x(x + 1) = 0$, odakle je $x = 0$ ili $x = -1$. Odgovarajuća rješenja su $(x, y, z) = (0, -1, 1)$ i $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$.

Dakle, rješenja danog sustava jednadžbi su

$$(x, y, z) \in \{(0, 0, 0),\ (1, 0, -1),\ (0, -1, 1),\ (-1, 1, 0)\}.$$

Drugo rješenje.

Zbrajanjem prve dvije jednakosti dobivamo $y^2 - y - z - z^2 = 0$, tj. $(y - z - 1)(y + z) = 0$. Odavde zaključujemo da je $y - z = 1$ ili $y + z = 0$.

Analogno vrijedi $z - x = 1$ ili $z + x = 0$, te $x - y = 1$ ili $x + y = 0$.

Jednadžbe $y - z = 1$, $z - x = 1$ i $x - y = 1$ zvat ćemo jednakosti prvog tipa, a jednadžbe $y + z = 0$, $z + x = 0$ i $x + y = 0$ jednakosti drugog tipa.

Zbog simetrije je dovoljno promotriti kombinacije u kojima se pojavljuje nula, jedna, dvije ili tri jednakosti prvog tipa.

Ako je $y + z = 0$ i $z + x = 0$, onda je $x = y$. Uz uvjet $x + y = 0$ dobivamo rješenje $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ i to pokriva slučaj s nula jednakosti prvog tipa. Uvjet $x - y = 1$ je nemoguć, što pokriva slučaj s jednom jednakosti prvog tipa.

Ako je $y + z = 0$, $z - x = 1$ i $x - y = 1$, zbrajanjem tih jednakosti dobivamo $2z = 2$, dakle $z = 1$, $y = -1$ i $x = 0$. Općenito u slučaju s dvije jednakosti prvog tipa imamo tri rješenja $(0, -1, 1)$, $(1, 0, -1)$ i $(-1, 1, 0)$.

Slučaj s tri jednakosti prvog tipa vodi na $0 = 3$ što je nemoguće.

Zadatak A-1.2.

Dokaži da ne postoje prirodni brojevi k i n takvi da vrijedi

$$k(k+1)(k+2)(k+3) = n(n+1).$$

Prvo rješenje.

Vrijedi

$$k(k+1)(k+2)(k+3) = (k^2+3k)(k^2+3k+2).$$

Neka je $a = k^2 + 3k$, čime dana jednakost prelazi u

$$a(a+2) = n(n+1),$$

pri čemu su a i n prirodni brojevi.

Sada promotrimo sljedeće slučajeve:

Prvi slučaj: $a \geqslant n$

Ovaj slučaj nema rješenja, jer vrijedi $a(a+2) > n(n+1)$.

Drugi slučaj: $a < n$

Ni u ovom slučaju nema rješenja, jer iz $a \leqslant n - 1$ slijedi

$$a(a+2) \leqslant (n-1)(n+1) < n(n+1).$$

Drugo rješenje.

Vrijedi

$$k(k+1)(k+2)(k+3) = (k^2+3k)(k^2+3k+2) = (k^2+3k+1)^2 - 1.$$

To znači da broj $n(n+1) + 1 = n^2 + n + 1$ mora biti potpun kvadrat, no to je nemoguće jer je

$$n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

tj. broj $n^2 + n + 1$ nalazi se između dvaju uzastopnih kvadrata.

Takvi prirodni brojevi k i n ne postoje.

Zadatak A-1.3.

Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta.

Dokaži da vrijedi

$$\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right) \geqslant 3+2\sqrt{2}.$$

Rješenje.

Sređivanjem izraza na lijevoj strani dane nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right) &= \frac{(a+c)(b+c)}{ab} = \frac{c^2+ab+c(a+b)}{ab} \\ &= \frac{c^2}{ab}+1+\frac{c(a+b)}{ab}\end{aligned}$$

Kako je trokut pravokutan, vrijedi $a^2+b^2=c^2$

$$= \frac{a^2+b^2}{ab}+1+\frac{\sqrt{a^2+b^2}(a+b)}{ab}$$

Sada koristimo $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ i $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

$$\begin{aligned}&\geqslant \frac{2ab}{ab}+1+\frac{\sqrt{2ab}\cdot 2\sqrt{ab}}{ab} \\ &= 2+1+2\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

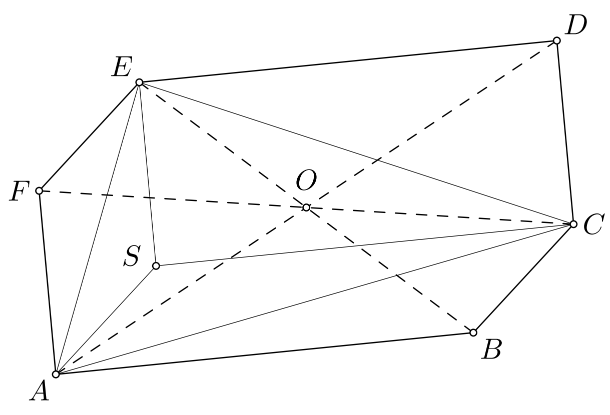
Zadatak A-1.4.

Dan je šesterokut $ABCDEF$ čije se dijagonale $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ sijeku u jednoj točki koja je ujedno polovište svake od tih dijagonala.

Dokaži da je površina danog šesterokuta dvostruko veća od površine trokuta ACE.

Prvo rješenje.

Dijagonale četverokuta $ABDE$ se raspolavljaju, pa je taj četverokut paralelogram, a stranice $\overline{AB}$ i $\overline{ED}$ su sukladne i paralelne.



Neka je S točka takva da je $ABCS$ paralelogram. Tada su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{SC}$ sukladne i paralelne, pa isto vrijedi i za dužine $\overline{ED}$ i $\overline{SC}$. To znači da je $CDES$ paralelogram. Analogno se pokaže da je i $EFAS$ paralelogram.

Kako svaka dijagonala dijeli paralelogram na dva sukladna trokuta, vrijedi $P(ABC) = P(CSA)$, $P(CDE) = P(ESC)$ i $P(EFA) = P(ASE)$.

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

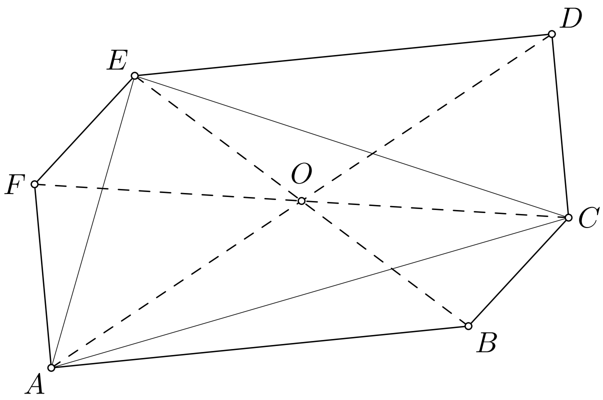
$$P(ABC) + P(CDE) + P(EFA) = P(CSA) + P(ESC) + P(ASE) = P(ACE).$$

No, $P(ABC) + P(CDE) + P(EFA) = P(ABCDEF) - P(ACE)$, pa dobivamo $P(ACE) = P(ABCDEF) - P(ACE)$ odakle slijedi $P(ABCDEF) = 2P(ACE)$.

Drugo rješenje.

Neka je O točka u kojoj se sijeku dijagonale $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$. Promatrani šesterokut je centralnosimetričan u odnosu na točku O, a glavne dijagonale ga dijele na tri para sukladnih trokuta:

$$\triangle ABO \cong \triangle DEO, \quad \triangle BCO \cong \triangle EFO, \quad \triangle CDO \cong \triangle FAO.$$



Vrijedi $P(ACE) = P(ACO) + P(CEO) + P(EAO)$.

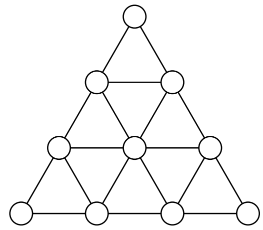
Kako je $|AO| = |OD|$, vrijedi $P(AOC) = P(COD)$, jer ti trokuti imaju sukladne osnovice i jednake visine. Analogno, $P(COE) = P(EOF)$ i $P(EOA) = P(AOB)$.

Konačno,

$$\begin{aligned}
P(ABCDEF) &= P(AOB) + P(BOC) + P(COD) + P(DOE) + P(EOF) + P(FOA) \\
&= P(AOB) + P(EOF) + P(COD) + P(AOB) + P(EOF) + P(COD) \\
&= 2\left(P(AOB) + P(COD) + P(EOF)\right) \\
&= 2\left(P(EOA) + P(AOC) + P(COE)\right) = 2P(ACE).
\end{aligned}$$

Zadatak A-1.5.

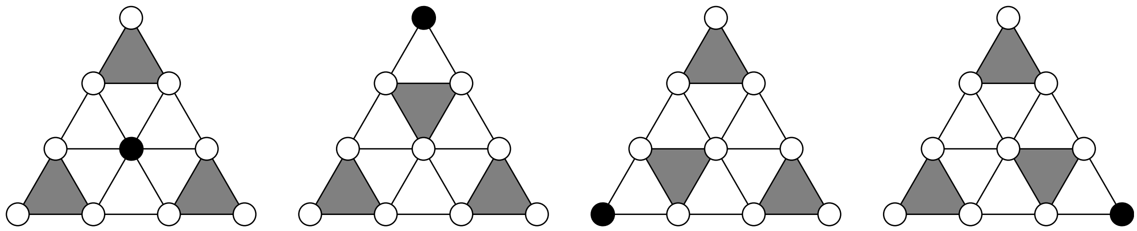
Brojevi $1, 2, \ldots, 10$ raspoređeni su u kružiće na slici, a zatim je u svaki od devet malih trokuta upisan zbroj brojeva upisanih u njegove vrhove.



Dokaži da među brojevima upisanim u trokute postoje tri čiji je zbroj barem 48.

Prvo rješenje.

Uočimo da je moguće odabrati tri trokuta tako da zbrojevi u njima čine zbroj brojeva u devet različitih kružića. "Neiskorišteni" kružić (na slici označen crnom bojom) nalazi se u jednom od vrhova danog trokuta ili u njegovom središtu.



Za određeni raspored brojeva, najveći zbroj ćemo dobiti ako izostavimo najmanji od brojeva u označenim poljima i tada je ukupna suma odabranih brojeva (tj. brojeva u tri odabrana trokuta) jednaka $(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) - m = 55 - m$, gdje je m najmanji od brojeva u označenim poljima.

Taj broj (m) može biti najviše 7 (ako su u ostalim označenim poljima brojevi 8, 9 i 10) pa je kao zbroj brojeva u tri odabrana trokuta sigurno moguće dobiti zbroj $55 - 7 = 48$ ili veći.

Drugo rješenje.

Neka je m broj u središnjem kružiću. Zbroj brojeva u tri trokuta u kutovima danog trokuta je zbroj svih brojeva od 1 do 10 bez m, pa iznosi $55 - m$. Ako je $m \leqslant 7$, onda je zbroj barem 48.

Pretpostavimo zato da je $m \geqslant 8$ i promotrimo tri mala trokuta kojima je jedan vrh upravo središte danog trokuta, koji ne dijele niti jednu stranicu. Zbrojimo li brojeve u ta tri trokuta dobivamo zbroj svih brojeva od 1 do 10 bez tri broja u vrhovima danog trokuta i uključujući tri puta broj m. Dakle, zbroj u ta tri trokuta je barem $21 + 3m$. Ako je $m \geqslant 9$, onda je zbroj barem 48.

Preostaje slučaj $m = 8$. Zbroj brojeva u trima trokutima u kutovima jednak je $55 - 8 = 47$, pa barem jedan od njih ima upisan barem 16. Ako nijedan od trokuta nema upisan zbroj 17 ili više, onda se broj 16 mora pojaviti u dva različita trokuta. Zbroj svih brojeva u bilo koja tri trokuta oko središta danog trokuta, odabrana kao i ranije, iznosi barem $21 + 3 \cdot 8 = 45$. Dakle, u obje trojke barem jedan trokut ima upisano barem 15, pa budući da trokuti sa zajedničkom stranicom ne mogu imati isti zbroj upisan barem jedan od šest trokuta oko središta danog trokuta ima upisano barem 16.

Dakle, možemo odabrati tri trokuta ili među jednim trokutom u kutu i dva trokuta u sredini ili dva trokuta u kutu i jedan trokut u sredini u koje su upisani najveći brojevi.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Dubrovnik, 3. travnja 2013.

Zadatak A-2.1.

Neka je a kompleksni broj takav da vrijedi

$$a^5 + a + 1 = 0.$$

Koje vrijednosti može poprimiti izraz $a^2(a-1)$?

Rješenje.

Vrijedi

$$\begin{aligned} a^5 + a + 1 &= (a^5 - a^4) + (a^4 - a^3) + (a^3 - a^2) + a^2 + a + 1 \\ &= (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1). \end{aligned}$$

Ako je $a^2 + a + 1 = 0$, onda je $a^2(a-1) = -(a+1)(a-1) = 1 - a^2 = a + 2$.

Kako je tada $a = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, u tom je slučaju $a^2(a-1) = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$.

Ako je $a^3 - a^2 + 1 = 0$, onda je $a^2(a-1) = a^3 - a^2 = -1$.

Promatrani izraz može poprimiti vrijednosti -1, $\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$ i $\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$.

Zadatak A-2.2.

Ako za realne brojeve x i y vrijedi

$$\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1,$$

dokaži da je $x + y = 0$.

Prvo rješenje.

Vrijedi

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x - \sqrt{x^2+1}} = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x^2 - (x^2+1)} = -x + \sqrt{x^2+1}.$$

Stoga dobivamo

$$y + \sqrt{y^2+1} = -x + \sqrt{x^2+1}$$

i analogno

$$x + \sqrt{x^2+1} = -y + \sqrt{y^2+1}.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti konačno slijedi $x + y = -x - y$ odnosno $x + y = 0$.

Drugo rješenje.

Neka je $a = x + \sqrt{x^2+1}$.

Tada je $\sqrt{y^2+1} = \dfrac{1}{a} - y$, pa kvadriranjem slijedi $y^2 + 1 = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{2y}{a} + y^2$, tj.

$$y = \frac{1-a^2}{2a}.$$

Uvrštavanjem $a = x + \sqrt{x^2+1}$ slijedi

$$y = -\frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1}}{2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} = -x.$$

Zadatak A-2.3.

Odredi sve parove (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednakost

$$y^2 = x^3 + 3x^2 + 2x.$$

Rješenje.

Rastavimo desnu stranu dane jednadžbe na faktore

$$y^2 = x(x+1)(x+2).$$

Kako je $x \in \mathbb{Z}$, dobiveni faktori su uzastopni cijeli brojevi.

Pretpostavimo najprije da su svi faktori, x, $x+1$ i $x+2$ različiti od nule. Kako je na lijevoj strani jednakosti pozitivan broj, ova tri faktora moraju biti pozitivna.

Tada je $x+1$ relativno prost s x i s $x+2$ jer su susjedni pa onda i s produktom $x(x+2)$. Produkt dva relativno prosta prirodna broja je potpuni kvadrat ako i samo ako su oba broja potpuni kvadrati. Posebno, to znači da je

$$x(x+2) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$$

potpun kvadrat. Dakle, $(x+1)^2 - 1$ i $(x+1)^2$ su dva uzastopna cijela broja koji su oba potpuni kvadrati, a to je moguće jedino ako su to nula i jedan. Dakle,

$$(x+1)^2 = 1$$

pa je $x = -2$ ili $x = 0$. Ali tada su $x + 2 = 0$ ili $x = 0$, što je kontradikcija s pretpostavkom da su svi faktori različiti od nule.

Ako je jedan od faktora na desnoj strani jednak nuli, onda je $y = 0$ i dobivamo rješenja

$$(x, y) \in \{(-2, 0), (-1, 0), (0, 0)\}.$$

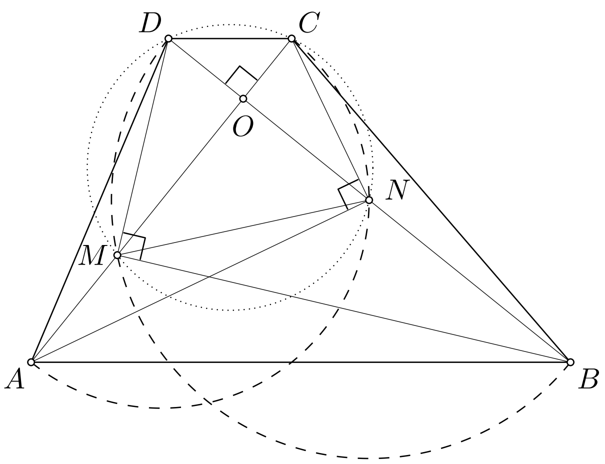
Zadatak A-2.4.

Dan je trapez $ABCD$ kojem su kutovi uz osnovicu $\overline{AB}$ šiljasti, a dijagonale su mu međusobno okomite i sijeku se u točki O. Polupravac OA siječe kružnicu s promjerom $\overline{BD}$ u točki M, a polupravac OB siječe kružnicu s promjerom $\overline{AC}$ u točki N.

Dokaži da točke M, N, C i D leže na jednoj kružnici.

Rješenje.

Kako je $ABCD$ trapez, trokuti ABO i CDO su slični i vrijedi $\dfrac{|OA|}{|OB|} = \dfrac{|OC|}{|OD|}$.



Euklidov poučak povlači $|OM|^2 = |OB| \cdot |OD|$, $|ON|^2 = |OA| \cdot |OC|$, odakle dobivamo

$$\frac{|OM|^2}{|ON|^2} = \frac{|OB| \cdot |OD|}{|OA| \cdot |OC|} = \frac{|OD|^2}{|OC|^2}.$$

Sada iz $|OM| : |ON| = |OD| : |OC|$ i $\sphericalangle MON = \sphericalangle COD = 90^\circ$ zaključujemo da su trokuti MON i DOC slični i vrijedi $\sphericalangle MNO = \sphericalangle DCO$.

To zapravo znači da je $\sphericalangle MND = \sphericalangle DCM$, odakle zaključujemo da su točke C, D, M i N konciklične.

Zadatak A-2.5.

Dana je tablica 6×6.

a) Ako je označeno bilo kojih 9 polja tablice, dokaži da je moguće odabrati tri retka i tri stupca koji sadrže sva označena polja.

b) Označi 10 polja tablice tako da koja god tri retka i tri stupca odaberemo, uvijek postoji bar jedno označeno polje koje nije u odabranim stupcima niti recima.

Prvo rješenje.

a) Razlikujemo tri slučaja (uočimo da su to jedine mogućnosti):

1. Postoje tri retka koja sadrže po barem 2 označena polja.
   U tom slučaju biramo ta tri retka i preostanu najviše 3 označena polja pa odabiremo odgovarajuće stupce.
2. Postoji jedan redak koji sadrži barem 3 i jedan redak koji sadrži barem 2 označena polja.
   U tom slučaju biramo ta dva retka i preostanu najviše 4 označena polja pa biramo redak u kojem je jedno od tih polja i tri stupca u kojima su preostala polja.
3. Postoji redak koji sadrži barem 4 označena polja.
   U tom slučaju odabiremo taj redak i preostane najviše 5 označenih polja, a imamo na raspolaganju još dva retka i tri stupca pa vidimo da se i u ovom slučaju to može postići.

b) Jedno takvo označavanje dano je na slici:

★					
	★				
		★	★		
			★	★	
				★	★
		★			★

Drugo rješenje.

a) Dokažimo da postoje tri retka koja sadrže barem šest označenih polja.

Prema Dirichletovom principu postoje tri retka koja sadrže ukupno barem pet označenih polja.

Pretpostavimo da su reci R_1, R_2 i R_3. Neka oni sadrže točno pet označenih polja (ako ih sadrže više, gotovi smo). Tada barem jedan od njih, neka je to R_3, sadrži najviše jedno označeno polje.

Preostali reci R_4, R_5 i R_6 sadrže četiri označena polja, pa barem jedan od njih sadrži dva označena polja. Bez smanjenja općenitosti neka je to redak R_6.

Tada reci R_1, R_2 i R_6 sadrže barem šest označenih polja. Odaberimo ta tri retka i tri stupca u kojima se nalaze preostala tri označena polja.

b) Primjer kao u prvom rješenju.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Dubrovnik, 3. travnja 2013.

Zadatak A-3.1.

Odredi nenegativni realni broj a tako da vrijednost izraza

$$a^3 - a^2 - 2\sqrt{a}$$

bude najmanja moguća.

Prvo rješenje.

Uočimo da je za $a \geqslant 0$ dani izraz definiran.

Za $a = 1$ vrijednost izraza je -2. Dokazat ćemo da je to najmanja moguća vrijednost.

Vrijedi

$$\begin{aligned} a^3 - a^2 - 2\sqrt{a} &= \left(a - 2\sqrt{a} + 1\right) + a^3 - a^2 - a - 1 \\ &= \left(\sqrt{a} - 1\right)^2 + a^2(a-1) - (a-1) - 2 \\ &= \left(\sqrt{a} - 1\right)^2 + \left(a^2 - 1\right)(a-1) - 2 \\ &= \left(\sqrt{a} - 1\right)^2 + (a-1)^2(a+1) - 2. \end{aligned}$$

Kvadrati realnih brojeva su uvijek nenegativni, a izraz $a + 1$ je pozitivan jer je $a \geqslant 0$.

Stoga je $a^3 - a^2 - 2\sqrt{a} \geqslant -2$ za sve $a \geqslant 0$.

Drugo rješenje.

Za $a = 1$ vrijednost izraza je -2. Dokazat ćemo da je to najmanja moguća vrijednost, tj. da za sve $a \geqslant 0$ vrijedi $a^3 - a^2 - 2\sqrt{a} \geqslant -2$.

Vrijedi

$$a^3 - a^2 - 2\sqrt{a} + 2 = a^2(a-1) - 2\left(\sqrt{a} - 1\right) = \left(\sqrt{a} - 1\right)\left(a^2\left(\sqrt{a} + 1\right) - 2\right).$$

Ako je $a \geqslant 1$, onda je $a^2\left(\sqrt{a} + 1\right) - 2 \geqslant 2 - 2 = 0$ i $\sqrt{a} - 1 \geqslant 0$ pa slijedi tvrdnja.

Ako je $0 \leqslant a < 1$, onda je $a^2\left(\sqrt{a} + 1\right) - 2 < 2 - 2 = 0$ i $\sqrt{a} - 1 < 0$ pa opet slijedi tvrdnja.

Zadatak A-3.2.

Odredi sve proste brojeve p za koje postoje prirodni brojevi x i y takvi da vrijedi

$$\left\{\begin{array}{rcl} p+1 & = & 2x^2 \\ p^2+1 & = & 2y^2. \end{array}\right.$$

Rješenje.

Direktno utvrdimo da $p = 2$ nije rješenje. Očito vrijedi $y > x$.

Oduzimanjem danih jednadžbi dobivamo $p(p-1) = 2(y-x)(y+x)$.

Odavde zaključujemo da

$$p \mid y + x$$

jer bi inače p bio djelitelj broja $y - x$, a $p - 1$ višekratnik broja $y + x$ što je nemoguće (tada bi bilo $p - 1 \geqslant y + x > y - x \geqslant p$).

Kako je $p > y$ (to se vidi iz druge jednadžbe) i $y > x$, vrijedi $2p > y + x$ pa mora biti $p = y + x$.

Tada je $p - 1 = 2(y - x)$. Eliminacijom y dobivamo $p + 1 = 4x$, pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu lako nalazimo jedino rješenje $p = 7$ ($x = 2$, $y = 5$).

Zadatak A-3.3.

Dokaži da je među bilo koja četiri broja iz intervala $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ moguće odabrati dva broja, nazovimo ih x i y, tako da vrijedi

$$8 \cos x \cos y \cos(x-y) + 1 > 4\left(\cos^2 x + \cos^2 y\right).$$

Prvo rješenje.

Dana nejednakost redom je ekvivalentna s

$$\begin{gathered}
8 \cos x \cos y\,(\cos x \cos y + \sin x \sin y) + 1 > 4\cos^2 x + 4\cos^2 y, \\
8\cos^2 x \cos^2 y + 8 \cos x \cos y \sin x \sin y - 4\cos^2 x - 4\cos^2 y + 1 > 0, \\
8\cos^2 x \cos^2 y - 4\cos^2 x - 4\cos^2 y + 2 \sin 2x \sin 2y + 1 > 0, \\
2\left(4\cos^2 x \cos^2 y - 2\cos^2 x - 2\cos^2 y + 1\right) + 2\sin 2x \sin 2y - 1 > 0, \\
2\left(2\cos^2 x - 1\right)\left(2\cos^2 y - 1\right) + 2 \sin 2x \sin 2y - 1 > 0, \\
\cos 2x \cos 2y + \sin 2x \sin 2y > \frac{1}{2}, \\
\cos(2x - 2y) > \frac{1}{2}.
\end{gathered}$$

Prema Dirichletovom principu, u jednom od skupova

$$\left\langle 0, \frac{\pi}{6} \right\rangle, \qquad \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\rangle, \qquad \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$$

nalaze se dva od dana četiri broja. Neka su to x i y.

Tada vrijedi $|2x - 2y| < \frac{\pi}{3}$ i $\cos(2x - 2y) > \frac{1}{2}$, čime je tvrdnja dokazana.

Drugo rješenje.

Dana nejednakost redom je ekvivalentna s

$$2\cos x\cos y\,(\cos x\cos y+\sin x\sin y)+\frac{1}{4}>\cos^2 x+\cos^2 y,$$

$$2\cos^2 x\cos^2 y+2\cos x\cos y\sin x\sin y-\cos^2 x-\cos^2 y+\frac{1}{4}>0,$$

$$\cos^2 x\cos^2 y+2\cos x\cos y\sin x\sin y+\left(\cos^2 x\cos^2 y-\cos^2 x-\cos^2 y+1\right)-1+\frac{1}{4}>0,$$

$$\cos^2 x\cos^2 y+2\cos x\cos y\sin x\sin y+\left(\cos^2 x-1\right)\left(\cos^2 y-1\right)>\frac{3}{4},$$

$$\cos^2 x\cos^2 y+2\cos x\cos y\sin x\sin y+\sin^2 x\sin^2 y>\frac{3}{4},$$

$$(\cos x\cos y+\sin x\sin y)^2>\frac{3}{4},$$

$$\cos^2(x-y)>\frac{3}{4}.$$

Dovoljno je pokazati da možemo odabrati x i y tako da bude $\cos|x-y|>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Prema Dirichletovom principu, u jednom od skupova

$$\left\langle 0,\frac{\pi}{6}\right\rangle,\qquad\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right\rangle,\qquad\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right\rangle$$

nalaze se dva od dana četiri broja. Neka su to x i y. Njihova razlika je manja od $\frac{\pi}{6}$ pa je $\cos|x-y|>\frac{\sqrt{3}}{2}$, a tada je i dana nejednakost zadovoljena.

Zadatak A-3.4.

Neka je ABC šiljastokutni trokut i H njegov ortocentar. Pravac kroz točku A okomit na $\overline{AC}$ i pravac kroz točku B okomit na $\overline{BC}$ sijeku se u točki D. Kružnica sa središtem u točki C koja prolazi točkom H siječe kružnicu opisanu trokutu ABC u točkama E i F.

Dokaži da vrijedi $|DE|=|DF|=|AB|$.

Prvo rješenje.

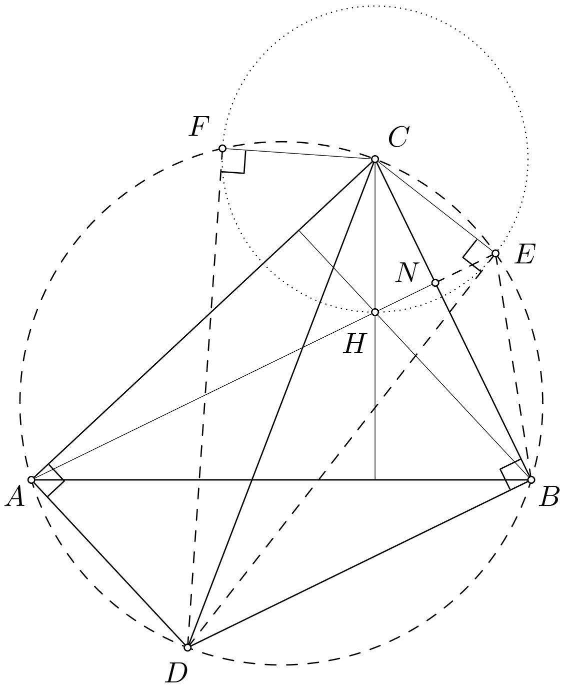
Neka su α, β, γ kutovi trokuta ABC i R polumjer njegove opisane kružnice. Bez smanjenja općenitosti, neka je točka E na luku BC, a točka F na luku AC.

Kako je $\sphericalangle CAD=\sphericalangle CBD=90°$, točka D leži na opisanoj kružnici trokuta ABC i $\overline{CD}$ je njen promjer.

Kako je $|CE|=|CH|$, $\sphericalangle BEC=180°-\alpha=\sphericalangle BHC$ i $\overline{BC}$ zajednička stranica trokuta BEC i BHC, ti su trokuti sukladni po "S-S-K" teoremu (kut $180°-\alpha$ je tupi). Stoga je $\sphericalangle ECB=\sphericalangle HCB$ pa je pravac BC os simetrije jednakokračnog trokuta ECH. Zato je $BC\perp HE$ pa zaključujemo da točke E, H i A leže na istom pravcu.

Iz pravokutnog trokuta CDE imamo

$$|DE|=|CD|\cos\sphericalangle CDE=|CD|\cos\sphericalangle CAE=|CD|\cos(90°-\gamma)=|CD|\sin\gamma.$$



Prema poučku o sinusima vrijedi $2R\sin\gamma = |AB|$, pa je $|DE| = |AB|$.

Analogno je $|DF| = |AB|$.

Napomena: Jednakost $|DE| = |DF|$ može se jednostavno dokazati: kako je $|CE| = |CF|$, pravokutni trokuti CED i CFD sa zajedničkom hipotenuzom $\overline{CD}$ su sukladni.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da je $\overline{CD}$ promjer kružnice opisane trokutu ABC. Slijedi da je CF okomit na FD i CE okomit na ED.

Primjenom Pitagorinog teorema na pravokutni trokut CDF slijedi da je $|DF|^2 = |CD|^2 - |CF|^2$. Označimo li s R polumjer opisane kružnice trokutu ABC, slijedi da je $|DF|^2 = 4R^2 - |CH|^2$.

Neka je N nožište visine iz A u trokutu ABC. Tada je $|CN| = |AC|\cos\gamma$ te

$$|CH| = \frac{|CN|}{\sin\beta} = \frac{|AC|}{\sin\beta} \cdot \cos\gamma = 2R\cos\gamma.$$

Slijedi $|DF|^2 = 4R^2 - 4R^2\cos^2\gamma = 4R^2\sin^2\gamma = |AB|^2$.

Analogno dokazujemo $|DE|^2 = |AB|^2$, pa slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak A-3.5.

Na natjecanju je sudjelovalo n učenika i svaki učenik je riješio točno tri zadatka. Za svaka dva učenika postoji točno jedan zadatak koji su obojica riješila, a svaki zadatak je riješilo točno k učenika. Za koje vrijednosti prirodnih brojeva n i k je to moguće?

Rješenje.

Za $k = 1$ pojedini zadatak je riješio samo jedan učenik. To znači da ne postoji drugi učenik zbog uvjeta da su svaka dva učenika riješili jedan zajednički zadatak.

Neka je sada $k \geqslant 2$.
Neka je A jedan od učenika. On je točno riješio tri zadatka, a svaki od ta tri zadatka je riješilo još $k-1$ učenika. Međutim, tih $3(k-1)$ učenika su svi različiti jer ne postoje dva učenika koja su riješila dva ista zadatka.
S druge strane, osim učenika A i tih $3(k-1)$ učenika nema drugih, jer je svaki učenik riješio jedan od zadataka koje je riješio A. Zato je broj učenika $n = 3(k-1) + 1 = 3k - 2$.

Promotrimo sada ukupan broj zadataka. Svaki učenik je riješio tri zadatka, ali svaki zadatak je riješilo k učenika. Stoga je broj zadataka jednak $\frac{3n}{k}$ i to naravno mora biti prirodan broj.

Koristeći gornju formulu za n dobivamo

$$\frac{3n}{k} = \frac{3 \cdot (3k-2)}{k} = 9 - \frac{6}{k},$$

odakle slijedi da k dijeli 6, odnosno $k \in \{2, 3, 6\}$ (zbog $k \geqslant 2$).

Za $k = 2$ imamo $n = 4$ učenika (A, B, C, D) i ukupno $\frac{3n}{k} = 6$ zadataka $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

$$\begin{aligned} A &: 1, 2, 3 \\ B &: 1, 4, 5 \\ C &: 2, 4, 6 \\ D &: 3, 5, 6 \end{aligned}$$

Za $k = 3$ imamo $n = 7$ učenika i ukupno $\frac{3n}{k} = 7$ zadataka. Traženi raspored je:

$$\begin{aligned} A &: 1, 2, 3 \\ B &: 1, 4, 5 \\ C &: 1, 6, 7 \\ D &: 2, 4, 6 \\ E &: 2, 5, 7 \\ F &: 3, 4, 7 \\ G &: 3, 5, 6 \end{aligned}$$

Za $k = 6$ imali bismo $n = 16$ učenika i $\frac{3n}{k} = 8$ zadataka. Tada je ukupan broj parova zadataka $\binom{8}{2} = 28$. No, broj parova zadataka koje je riješio isti učenik jednak je $3 \cdot 16 = 48$, jer ne postoje dva učenika koja su riješila ista dva zadatka. Kako je $48 > 28$, ovaj slučaj je nemoguć.
Dakle, opisana situacija moguća je za $(n, k) \in \{(1, 1), (4, 2), (7, 3)\}$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Dubrovnik, 3. travnja 2013.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve prirodne brojeve n takve da je umnožak svih pozitivnih djelitelja broja n jednak n^3. Prikaži ih u kanonskom obliku, tj. pomoću rastava na proste faktore.

Prvo rješenje.

Neka su $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ svi pozitivni djelitelji broja n. Primijetimo da je

$$d_1 \cdot d_k = d_2 \cdot d_{k-1} = d_3 \cdot d_{k-2} = n.$$

Iz ovoga zaključujemo da je umnožak djelitelja broja n jednak n^3 ako i samo ako n ima točno šest djelitelja.

Za prosti broj p, djelitelji broja p^α su $1, p, p^2, \ldots, p^\alpha$; ima ih $\alpha + 1$. Stoga brojevi oblika p^5, gdje je p prost broj, imaju šest djelitelja.

Ako je n broj djeljiv s tri različita prosta broja p, q i r, onda su $1, p, q, r, pq, qr, rp, pqr$ različiti djelitelji broja n, pa broj djeljiv s najmanje tri različita prosta broja ima više od šest djelitelja.

Razmotrimo sada brojeve oblika $n = p^\alpha q^\beta$, gdje su p i q različiti prosti brojevi, a α i β prirodni brojevi. Bez smanjenja općenitosti neka je $\alpha \geqslant \beta$.

Ako je $\alpha = \beta = 1$, jedini djelitelji broja $n = pq$ su 1, p, q i pq.

Ako je $\alpha = 2$, $\beta = 1$, uz to i p^2 i p^2q dijele n, pa $n = p^2q$ ima točno šest djelitelja.

Ako je $\alpha \geqslant 3$ ili $\beta \geqslant 2$, onda n ima više od šest djelitelja (uz šest navedenih, djelitelj je i sam n).

Traženi brojevi su brojevi oblika $n = p^5$ za neki prost broj p i $n = p^2q$ za različite proste brojeve p i q.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da broj n zadovoljava navedeni uvjet ako i samo ako ima točno šest djelitelja.

Prirodni broj n možemo prikazati u obliku $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, gdje su $p_1, p_2, \ldots, p_r$ različiti prosti brojevi, a $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_r$ prirodni brojevi.

Poznato je da je broj djelitelja tog broja jednak $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_r + 1)$.

Dakle, dobivamo uvjet

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_r + 1) = 6.$$

Kako je svaki od faktora na lijevoj strani veći od 1, postoje samo dvije mogućnosti:

$$r = 1,\ \alpha_1 = 5 \qquad \text{ili} \qquad r = 2,\ \alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 1.$$

Uvjet da n ima točno šest djelitelja je zadovoljen ako i samo ako je $n = p^5$ za neki prost broj p ili $n = p^2q$ za različite proste brojeve p i q.

Zadatak A-4.2.

Niz (a_n) zadan je rekurzivno: $a_1 = 2$, $a_n = 2\left(n + a_{n-1}\right)$ za $n \geqslant 2$.

Dokaži da je $a_n < 2^{n+2}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

Prvih nekoliko članova niza su

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2(2+2) = 8, \quad a_3 = 2(3+8) = 22, \quad a_4 = 2(4+22) = 52, \quad \ldots$$

Promotrimo razlike $2^{n+2} - a_n$:

$$\begin{aligned} 2^3 - a_1 &= 8 - 2 = 6, \\ 2^4 - a_2 &= 16 - 8 = 8, \\ 2^5 - a_3 &= 32 - 22 = 10, \\ 2^6 - a_4 &= 64 - 52 = 12. \end{aligned}$$

Naslućujemo da vrijedi $a_n = 2^{n+2} - 2(n+2)$, što ćemo dokazati metodom matematičke indukcije. Bazu indukcije smo već provjerili.

Pretpostavimo da je $a_n = 2^{n+2} - 2(n+2)$ za neki $n \in \mathbb{N}$.

Koristeći zadanu rekurziju dobivamo

$$a_{n+1} = 2\left((n+1) + a_n\right) = 2\left(n + 1 + 2^{n+2} - 2(n+2)\right) = 2 \cdot 2^{n+2} - 2(n+3) = 2^{n+3} - 2(n+3).$$

Ovim je proveden korak indukcije, pa zaključujemo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_n = 2^{n+2} - (n+2) < 2^{n+2}.$$

Zadatak A-4.3.

Neka su a i b realni brojevi. Poznato je da parabola $y = ax^2 + b$ siječe krivulju $y = x + \dfrac{1}{x}$ u točno tri točke. Dokaži da vrijedi $3ab < 1$.

Rješenje.

Iz uvjeta zadatka slijedi da sustav

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + b \\ y &= x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ima tri rješenja, odnosno da kubna jednadžba

$$ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$$

ima tri realna rješenja. Označimo ta rješenja s x_1, x_2, x_3. Iz Vièteovih formula slijedi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \frac{1}{a}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= \frac{b}{a}, \\ x_1x_2x_3 &= \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Željena nejednakost $3ab < 1$ ekvivalentna je s $\frac{1}{a^2} > 3 \cdot \frac{b}{a}$, odnosno

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 > 3\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\right).$$

Nije teško pokazati da je ovo ekvivalentno s

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 > 0,$$

a ta nejednakost vrijedi jer su točke (a onda i njihove apscise) međusobno različite.

Zadatak A-4.4.

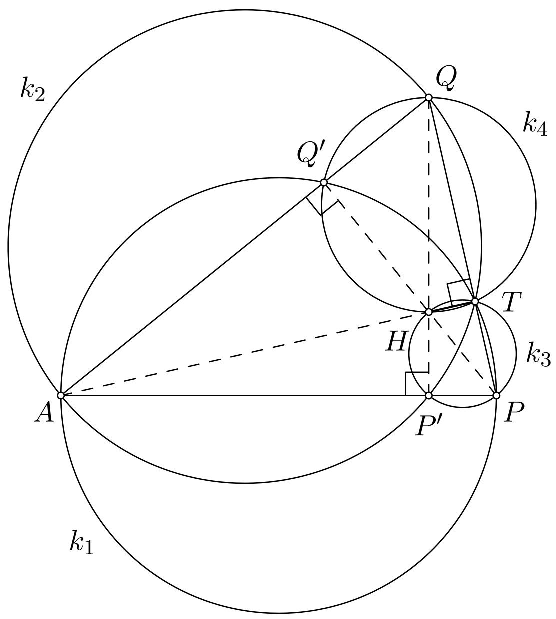
Neka su k_1 i k_2 kružnice s promjerima $\overline{AP}$ i $\overline{AQ}$. Neka je T drugo sjecište kružnica k_1 i k_2. Neka je Q' drugo sjecište kružnice k_1 i pravca AQ, a P' drugo sjecište kružnice k_2 i pravca AP. Kružnica k_3 prolazi točkama T, P i P', a kružnica k_4 točkama T, Q i Q'.

Dokaži da pravac na kojem leži zajednička tetiva kružnica k_3 i k_4 prolazi točkom A.

Prvo rješenje.

Najprije uočimo da je, prema Talesovom teoremu, $\sphericalangle ATQ = \sphericalangle ATP = 90°$ pa su točke P, Q i T kolinearne.

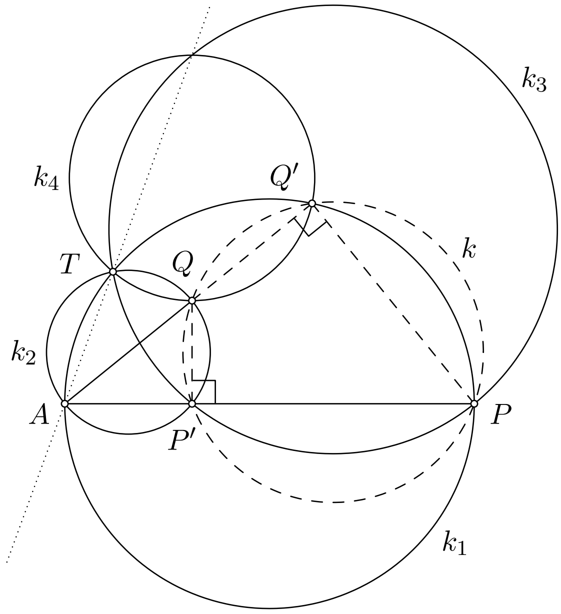
Također vrijedi $\sphericalangle AQ'P = \sphericalangle AP'Q = 90°$.



Promotrimo trokut APQ. Njegove visine su $\overline{AT}$, $\overline{PQ'}$ i $\overline{QP'}$. Neka je H ortocentar trokuta APQ. Tada su točke T, P, P' i H konciklične (zbog Talesovog poučka), pa točka H leži na kružnici k_3. Analogno, točka H leži na kružnici k_4.

Dakle, zajednička tetiva kružnica k_3 i k_4 je $\overline{TH}$. Time je tvrdnja dokazana jer točke A, H i T leže na visini iz A na $\overline{PQ}$.

Drugo rješenje.



Budući da je $\overline{AP}$ promjer, slijedi da je pravac PQ' okomit na pravac QQ'. Analogno, pravac QP' je okomit na pravac PP'. Slijedi da točke P, P', Q i Q' leže na kružnici k s promjerom $\overline{PQ}$.

Potencijala kružnica k i k_3 je pravac PP', a potencijala kružnica k i k_4 pravac QQ'. Sjecište pravaca PP' i QQ' je točka A, pa je A radikalno središte kružnica k, k_3 i k_4. Stoga točka A leži na potencijali kružnica k_3 i k_4, što je trebalo dokazati.

Zadatak A-4.5.

Dokaži da bilo koji 2001-člani podskup skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 3000\}$ sadrži tri elementa od kojih su svaka dva međusobno relativno prosta.

Rješenje.

Neka je S proizvoljan skup od 2001 različitih prirodnih brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 3000\}$. Promotrimo 500 skupova

$$K_j = \{6j + i \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, 499.$$

Među njima postoji skup s najmanje pet elemenata iz S (jer je $4 \cdot 500 < 2001$).

Ako su tri od tih pet elemenata neparni brojevi, to je tražena trojka.

U suprotnom, u uočenom skupu K_j su tri parna i dva neparna broja iz S.

Ta dva neparna broja su relativno prosta jer je njihova razlika 2 ili 4.

Tri parna broja iz istog skupa K_j su tri uzastopna parna broja. Samo jedan od njih je djeljiv s 3 i najviše jedan od njih može biti djeljiv s 5. Stoga možemo odabrati paran broj koji nije djeljiv ni s 3 ni s 5.

Taj paran broj s dva neparna broja čini traženu trojku. Naime, kako je razlika brojeva u skupu K_j manja od 6, samo jedan od njih može biti djeljiv prostim brojem p, $p \geqslant 7$.