Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 26. travnja 2012.

1. Kratka poznanstva nisu uvijek najpouzdanija. Zato Barbara nije odmah izravno rekla broj svoga telefona novom prijatelju Luki, već je njegovoj želji udovoljila na zaobilazni način: "Imam dva telefona. Brojevi tih telefona su šesteroznamenkasti brojevi sa sljedećim svojstvima. U njihovom je dekadskom zapisu troznamenkasti broj na početku dvostruko manji od troznamenkastog broja na kraju. Zbroj tih dvaju troznamenkastih brojeva je broj između 800 i 850. Sva tri troznamenkasta broja sastavljena su od 9 različitih znamenaka."

   Pomozite Luki i odredite o kojim se telefonskim brojevima radi.

2. U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu:

$$f(x) + f(2 - x) = 2,$$

   gdje je

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}.$$

3. Dokažite da je $e + f < 2a + h$, gdje su e i f duljine dijagonala romba, a duljina stranice, a h duljina visine romba.

4. U pravokutnom trokutu ABC, s pravim kutom u vrhu C, duljina stranice $\overline{BC}$ iznosi a, a mjera nasuprotnog kuta je $30°$. Točka S je središte trokutu upisane kružnice, a točka D je polovište hipotenuze. Dokažite da je $|CS| = |DS|$ i odredite polumjer upisane kružnice.

5. U posudi, koja nije puna do vrha, nalazi se otopina koja sadrži 85% alkohola. Posudu dopunimo do vrha s otopinom koja sadrži 21% alkohola i dobro promiješamo. Ako odlijemo toliko tekućine koliko smo dolili i ponovimo postupak (opet ulijemo 21% otopinu alkohola), dobit ćemo otopinu koja sadrži 70% alkohola. Koliko alkohola sadrži otopina nakon prvog dopunjavanja? Koliki je dio posude bio ispunjen otopinom prije prvog dopunjavanja?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 26. travnja 2012.

1. Riješite jednadžbu
$$3^{1+4x+2x^2} + 2^{1+4x+2x^2} = 5 \cdot 6^{x(x+2)}.$$

2. Odredite sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi $z^3 = \overline{z}$.

3. Gradski je trg oblika pravilnog osmerokuta. Gradsko je vijeće odlučilo urediti trg i unutar njega postaviti fontanu. Majstoru Matku nisu znali reći gdje treba staviti središte fontane, već su mu rekli: "Ako središte fontane spojimo s vrhovima osmerokuta, dobivenih osam trokuta treba popločiti naizmjence crnim i bijelim pločicama, tako da je ukupna površina popločena crnim pločicama jednaka ukupnoj površini popločenoj bijelim pločicama." Majstor Matko je ipak tražio da mu kažu točno mjesto, jer tvrdi da je njihov zahtjev ispunjen gdje god da unutar trga postavi fontanu. Dokažite da je majstor u pravu.

4. Odredite sve sedmeroznamenkaste brojeve oblika $\overline{2012xyx}$ koji su djeljivi sa 72.

5. $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ su dvije međusobno okomite tetive kružnice polumjera 10 cm. Dva promjera te kružnice, jedan kroz točku A, a drugi kroz točku B, dijele tetivu $\overline{CD}$ na tri jednaka dijela. Odredite sinus manjeg obodnog kuta nad tetivom $\overline{CD}$, ako je duljina tetive $\overline{AB}$ jednaka 16 cm.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 26. travnja 2012.

1. Riješite nejednadžbu

$$\frac{\sin^2 x - 2\sin 2x + 3\cos^2 x}{1 - \sin 2x} \geq 0, \quad \text{ako je } |x| < \frac{\pi}{2}.$$

2. Neka je skup $A = \{n : n \in \mathbb{N},\ n < 101\}$. Koliko ima četveročlanih podskupova skupa A kojima je razlika najvećeg i najmanjeg elementa jednaka 12?

3. Riješite jednadžbu $x^{\log_5 6} - 5 \cdot 6^{\log_5 \sqrt{x}} = 6$.

4. Grupa je djece našla drvenu ploču u obliku četverokuta i odlučila je iskoristiti za igru "pikado". Kako je meta neobičnog oblika, trebalo je prilagoditi pravila igre. Upitali su za savjet Markovog starijeg brata, dobrog matematičara. On je nešto mjerio, računao, pisao ...i došao do važnog zaključka. Ustanovio je da postoji točka O jednako udaljena od svih stranica četverokuta. Zatim je podijelio ploču na područja tako da je nacrtao spojnice točke O sa svim vrhovima A, B, C, D. Područjima je dodijelio bodove obrnuto proporcionalno njihovoj površini. Koje područje donosi najviše bodova i zašto? Markov je brat dodao uvjet da se bodovi dobivaju samo ako udaljenost od pogođene točke T do točke O nije veća od udaljenosti točke O do bilo koje stranice ploče. Odredite omjer površina onog dijela ploče koji ne donosi i onog dijela koji donosi bodove.

   Markov je brat izmjerio ove vrijednosti $|AB| = 5$ dm, $|BC| = 3$ dm, $|AD| = 4$ dm, $|\angle BAD| = 60°$.

5. Jednakokračnom trokutu kojemu je duljina kraka $b = 10$ cm, a mjera kuta između krakova $\alpha = 30°$, opisana je kružnica. Neka je t tangenta te kružnice koja je paralelna s visinom na osnovicu. Izračunajte obujam tijela koje nastaje rotacijom danog trokuta oko tangente t.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 26. travnja 2012.

1. Ako je
$$f\left(\log_3 x\right) = \frac{\log_3 \frac{9}{x^4}}{\log_{0.\dot{3}} x - \log_{\sqrt{3}} x} \quad \text{i} \quad (f \circ g)(x) = e^x,$$
koliko je $g(\ln 2)$?

2. Ako je $z + z^{-1} = 2\cos\dfrac{\alpha}{2012}$, odredite α za koji je $z^{2012} + z^{-2012} = 1$.

3. U romb, kojemu je duljina stranice a i mjera šiljastog kuta α, upisana je kružnica. Dokažite da je zbroj kvadrata udaljenosti od proizvoljne točke kružnice do vrhova romba konstanta. Koliko ona iznosi?

4. Odredite sve vrijednosti realnog parametra p za koje jednadžba $x^4 - (3p+2)x^2 + p^2 = 0$ ima četiri rješenja koja čine četiri uzastopna člana aritmetičkog niza.

5. U utrci je sudjelovalo 100 ljudi i nikoje dvoje nije utrku završilo s istim vremenom. Svakom je natjecatelju na kraju utrke postavljeno pitanje na kojem je mjestu završio utrku i svi su odgovorili brojem između 1 i 100.

   Zbroj svih odgovora iznosi 4000. Koji je najmanji broj krivih odgovora koje su trkači mogli dati? Obrazložite.