Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

23. veljače 2016.

1. Opseg pravokutnog trokuta iznosi 18, a površina 9. Kolika je duljina hipotenuze tog trokuta?

2. a) Dokaži da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kvadrata jednaka 987654;

b) Dokaži da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kubova jednaka 987654.

3. Odredi najmanju moguću vrijednost izraza

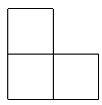
$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24,$$

pri čemu su a, b i c realni brojevi, te odredi a, b i c za koje se ta vrijednost postiže.

4. U trokutu ABC kut kod vrha A je dvostruko veći od kuta kod vrha B. Neka simetrala kuta kod vrha C siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Dokaži da vrijedi

$$|BC| = |AD| + |AC|.$$

5. Na koliko načina možemo obojati polja ploče 2×2016 u dvije boje tako da ne postoje tri polja iste boje koja se mogu istovremeno pokriti pločicom oblika kao na slici? Pločicu je dozvoljeno rotirati.



Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

23. veljače 2016.

1. Dan je jednakokračni pravokutni trokut čije su katete duljine 10. Odredi najveću moguću površinu pravokutnika čija jedna stranica leži na hipotenuzi, a po jedan vrh na katetama danog trokuta.

2. Neka su kompleksni brojevi a, b i c rješenja jednadžbe $x^3 - 2x + 2 = 0$. Odredi

$$\frac{a+1}{a-1} + \frac{b+1}{b-1} + \frac{c+1}{c-1}.$$

3. Koliko ima uređenih parova prirodnih brojeva (m, k) za koje vrijedi

$$20m = k(m - 15k)\ ?$$

4. Na kružnici k nalaze se točke A i B, a na manjem luku $\widehat{AB}$ točka P. Neka su Q i R točke na k, različite od P, takve da je $|AP| = |AQ|$ i $|BP| = |BR|$. Neka je T sjecište pravaca AR i BQ. Dokaži da su pravci PT i AB međusobno okomiti.

5. Polja ploče 2×50 potrebno je obojati u dvije boje, crvenu i plavu, tako da budu zadovoljeni sljedeći uvjeti:

- na ploči se pojavljuju obje boje
- uklanjanjem svih crvenih polja ploča ostaje povezana
- uklanjanjem svih plavih polja ploča ostaje povezana.

Ploča je povezana ako se od svakog polja može doći do svakog drugog, prelazeći u svakom koraku s polja na njemu susjedno polje. Polja su susjedna ako imaju zajedničku stranicu.

Na koliko je načina to moguće napraviti?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

23. veljače 2016.

1. Neka su x i y realni brojevi takvi da vrijedi $\sin x + \sin y = \frac{1}{3}$. Dokaži da vrijedi

$$\sin(3x) + \sin(3y) \leqslant \frac{26}{27}.$$

2. Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takve da vrijedi

$$a^3 - 3b = 15,$$
$$b^2 - a = 13.$$

3. Jednakokračni trokut ABC ($|AB| = |AC|$) upisan je u kružnicu k. Neka je D točka na osnovici $\overline{BC}$ tog trokuta, k_1 kružnica opisana trokutu ABD i E točka na kružnici k_1. Pretpostavimo da pravac AE siječe kružnicu k u točkama A i F tako da F leži između A i E. Ako se pravci DE i BF sijeku u točki G, dokaži da vrijedi $|EG| = |GF|$.

4. Neka je k kružnica s promjerom $\overline{AB}$ i t tangenta kružnice k s diralištem u točki A. Neka je P bilo koja točka na kružnici k i neka je N ortogonalna projekcija točke P na pravac t.

Odredi kut $\sphericalangle ABP$ za koji izraz $|PB| + |PN|$ ima najveću moguću vrijednost.

5. Promatramo sve pravokutne ploče čija je polja moguće obojati tako da u svakom retku bude točno 14 plavih polja, u svakom stupcu točno 10 crvenih polja i da na cijeloj ploči budu točno 3 polja koja nisu ni crvena ni plava.

Odredi dimenzije takve ploče koja ima najmanji ukupan broj polja.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

23. veljače 2016.

1. Neka su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi takvi da je

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = (x+1)^3 (x+2)^3 \cdots (x+672)^3.$$

Odredi zbroj

$$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2016}.$$

2. Dokaži da za svaki prirodni broj $n \geqslant 3$ postoji n različitih prirodnih brojeva čiji je zbroj recipročnih vrijednosti jednak 1.

3. U šiljastokutnom trokutu ABC u kojem je $|AB| < |AC|$, točka D leži na stranici $\overline{BC}$. Okomica iz točke B na pravac AD siječe kružnicu opisanu trokutu ABD u točkama B i E. Ako su pravci DE i AC međusobno okomiti, dokaži da je AD simetrala kuta $\sphericalangle BAC$.

4. Odredi sve parove cijelih brojeva (a, b) za koje vrijedi

$$(7a - b)^2 = 2(a-1)b^2.$$

5. Neka je n prirodni broj. Na koliko načina možemo tablicu $n \times n$ popuniti brojevima $1, 2, -1, -2$ tako da umnožak brojeva u svakom retku bude jednak -2 i da umnožak brojeva u svakom stupcu bude također jednak -2 ?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.