Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Šibenik, 3. travnja 2014.

1. (10) Odredite ostatak pri dijeljenju broja $(7^{2012})^{2014} - (3^{12})^{14}$ s 10.

2. (10) Odredite sve cijele brojeve a za koje jednadžba

$$3 \cdot |x-2| + a \cdot |3-x| = a + 4 - x$$

ima cjelobrojna rješenja.

3. (10) Bazen se puni dvjema pumpama. Ako su obje pumpe otvorene 20 minuta do punog bazena bi nedostajalo još 1000 litara, a ako su obje otvorene 70 minuta, 250 litara bi se prelilo izvan punog bazena. Prva pumpa može napuniti u 2 minute onoliki dio koliko druga može napuniti u 3 minute. Koliko vremena treba svakoj od njih da sama napuni cijeli bazen?

4. (10) U krugu polumjera r povučene su s iste strane središta dvije paralelne tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. $\overline{AB}$ je stranica jednakostraničnog trokuta upisanog tom krugu, a $\overline{CD}$ je stranica pravilnog šesterokuta upisanog istom krugu. Odredite opseg i površinu trapeza $ABCD$.

5. (10) Marko i njegov "bend" su krenuli na turneju. Prvog su dana išli prema istoku, drugog su dana nastavili prema sjeveru, trećeg su dana nastavili prema zapadu, četvrtog dana prema jugu, petog prema istoku i tako dalje. Ako su n-tog dana turneje prešli $\frac{n^2}{2}$ kilometara, koliko su km bili udaljeni od polaznog mjesta na kraju četrdesetog dana?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Šibenik, 3. travnja 2014.

1. (10) Koliko ima kompleksnih brojeva $z = a + bi$ za koje vrijedi:

$$a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \cdot b \geq 0 \quad \text{i} \quad \frac{|z| - 16}{1 - |z|} \geq 2?$$

2. (10) Točke H i N redom su nožišta visina iz vrha A i vrha B šiljastokutnog trokuta ABC. Duljina visine iz vrha A iznosi $5\sqrt{3}$ cm, duljina stranice $\overline{AB}$ 14 cm, a mjera kuta kojeg zatvaraju visine $\overline{AH}$ i $\overline{BN}$ iznosi $60°$. Odredite duljine preostalih stranica trokuta te duljinu dužine $\overline{HN}$.

3. (10) Riješite jednadžbu

$$x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8.$$

4. (10) Zadan je kvadrat $ABCD$ duljine stranice 10 cm. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka E, na stranici $\overline{BC}$ točka F, na stranici $\overline{CD}$ točka G i na stranici $\overline{DA}$ točka H tako da je $EFGH$ također kvadrat. Izračunajte duljinu dužine $\overline{AE}$ tako da zbroj površine kruga upisanog kvadratu $EFGH$ i površina krugova upisanih trokutima EBF, FCG, GDH i HAE bude najmanji mogući.

5. (10) Profesor Ante na ploči je ispisao redom prvih n prirodnih brojeva, počevši od 1 i rekao Mati: "Ispod svakog zapisanog broja napiši umnožak tog broja i svih brojeva zapisanih ispred njega." "A ti Kate zbroji sve brojeve koje je zapisao Mate i zapiši rezultat." Ako je Kate zapisala broj m^2, odredite sve parove prirodnih brojeva m i n za koje to vrijedi.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
3. razred – srednja škola – B varijanta
Šibenik, 3. travnja 2014.

1. (10) Riješite jednadžbu $\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1$.

2. (10) Odredite sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \ldots + \frac{1}{\log_x 2^{2013} \cdot \log_x 2^{2014}} \leq 2013 \log_2 x.$$

3. (10) Duljina veće osnovice trapeza iznosi 18 cm, a duljine krakova trapeza su $b = 12$ cm i $d = 8$ cm. Omjer kutova uz veću osnovicu je $2 : 1$. Odredite duljinu manje osnovice trapeza.

4. (10) U ravnini je nacrtano 100 koncentričnih kružnica kojima su polumjeri 1 cm, 2 cm, 3 cm,. . . , 100 cm. Krug polumjera 1 cm obojan je crveno, a sva ostala područja omeđena uzastopnim kružnicama obojana su ili crveno ili zeleno, ali tako da su susjedna područja obojana različitim bojama. Odredite omjer površine svih zelenih područja i površine svih crvenih područja.

5. (10) Grupa djece se natjecala tko će pojesti više jagoda. Pobjednik je pojeo n jagoda, a svaki sljedeći po dvije jagode manje i tako sve do posljednjeg djeteta na k-tom mjestu, koje je pojelo $n+2-2k$ jagoda. Ukupan broj pojedenih jagoda na natjecanju iznosi 2014. Koliko je najmanje jagoda pojeo pobjednik?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Šibenik, 3. travnja 2014.

1. (10) Odredite prirodni broj N za koji vrijedi

$$\frac{1}{2!11!}+\frac{1}{3!10!}+\frac{1}{4!9!}+\frac{1}{5!8!}+\frac{1}{6!7!}=\frac{N}{1!12!}.$$

2. (10) Opći član niza a_n dan je formulom $a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$. Odredite zbroj prvih 9999 članova tog niza.

3. (10) U kvadratnu plutenu ploču kojoj je duljina stranice 1 metar zabodena je 201 pribadača. Dokažite da barem tri pribadače leže unutar kruga polumjera $\frac{1}{14}$ metra.

4. (10) Odredite sve prirodne brojeve a za koje je broj a^3+1 potencija broja 3.

5. (10) Uz ravnu su cestu duž jednog pravca zasađena 4 stabla. Prvo je od drugog udaljeno 6 m, drugo od trećeg 4 m i treće od četvrtog 8 m. Na kojoj se udaljenosti od svakog od stabala nalazi promatrač koji sve tri udaljenosti među stablima vidi pod istim kutom?