ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2011.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1. U troznamenkastom broju je znamenka stotica jednaka 3. Ako se ona premjesti na mjesto jedinica, dobije se 75% početnog broja. Koji je to broj?

Prvo rješenje. Traženi broj je oblika $\overline{3xy} = 300 + 10x + y$. Zadani uvjet možemo zapisati kao

$$\overline{xy3} = 0.75 \cdot \overline{3xy} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$100x + 10y + 3 = \frac{3}{4}(300 + 10x + y)$$

$$\frac{185}{2}x + \frac{37}{4}y = 222 \;/ \cdot \frac{4}{37}$$

$$10x + y = 24. \qquad \text{(2 boda)}$$

Slijedi da je $\overline{xy} = 24$ pa je $\overline{3xy} = 324$ i to je traženi broj. (1 bod)

Drugo rješenje.

Traženi broj je oblika $\overline{3xy} = 300 + a$, gdje je a dvoznamenkasti broj $\overline{xy}$. (1 bod)

Tada je

$$10a + 3 = \frac{3}{4}(300 + a), \qquad \text{(1 bod)}$$

a odatle se dobije $a = 24$ pa je traženi broj 324. (2 boda)

Zadatak B-1.2. Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq \frac{3}{4}c^4.$$

Rješenje. Iz $a^2 + b^2 = c^2$ slijedi $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = c^4$. (1 bod)

Stoga nejednakost koju treba dokazati poprima oblik

$$
\begin{aligned}
& 4\left(a^4 + a^2b^2 + b^4\right) \geq 3\left(a^4 + 2a^2b^2 + b^4\right) && \text{(1 bod)}\\
\Longleftrightarrow\quad & 4a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 \geq 3a^4 + 6a^2b^2 + 3b^4 \\
\Longleftrightarrow\quad & a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \left(a^2 - b^2\right)^2 \geq 0 && \text{(2 boda)}
\end{aligned}
$$

što je točno.

Zadatak B-1.3. Za prijevoz riže su na raspolaganju vreće od 40 kg i 60 kg. Koliko treba jednih, a koliko drugih vreća za prijevoz 500 kg riže, ako vreće moraju biti pune? Odredite sve mogućnosti.

Rješenje.

S x označimo broj vreća od 40 kg, a s y broj vreća od 60 kg. Mora biti $x, y \in \mathbb{N}_0$ i

$$\begin{aligned} 40x + 60y &= 500 \\ 2x + 3y &= 25 \end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$

Tada je $2x = 25 - 3y$. Za parne y je $25 - 3y$ neparan broj, a $2x$ je paran. Dakle, y mora biti neparan cijeli broj manji od 8 (jer mora biti $25 - 3y > 0$). Uvrstimo redom neparne y.

$$\begin{aligned} y = 1 &\quad\Rightarrow\quad x = 11, \\ y = 3 &\quad\Rightarrow\quad x = 8, \\ y = 5 &\quad\Rightarrow\quad x = 5, \\ y = 7 &\quad\Rightarrow\quad x = 2. \end{aligned}$$

To su sva rješenja. (2 boda)

Zadatak B-1.4. Zbroj 2011 uzastopnih cijelih brojeva iznosi 2011. Nađite najveći pribrojnik.

Prvo rješenje. Neka je x najveći pribrojnik. Onda možemo pisati

$$\begin{aligned} x + (x-1) + (x-2) + \ldots + (x-2010) &= 2011 && \text{(1 bod)} \\ 2011x - (1+2+3+\ldots+2010) &= 2011 && \text{(1 bod)} \\ 2011x - \frac{2010 \cdot 2011}{2} &= 2011 && \text{(1 bod)} \\ 2011x - 1005 \cdot 2011 &= 2011 \;\big/ : 2011 \\ x - 1005 &= 1 \\ x &= 1006. && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Najveći pribrojnik je 1006.

Drugo rješenje.

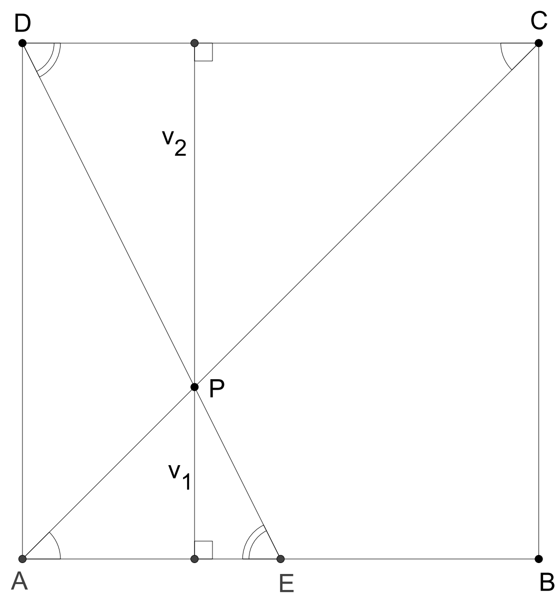
Učenik može napisati jednadžbu:

$$x + (x+1) + (x+2) + \ldots + (x+2010) = 2011.$$

Tada će dobiti najmanji pribrojnik $x = -1004$ pa je najveći pribrojnik $-1004 + 2010 = 1006$.

Zadatak B-1.5. Neka je E polovište stranice $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$ i neka je P točka presjeka dužine $\overline{DE}$ i dijagonale $\overline{AC}$. Odredite površinu trokuta AEP ako je $|AB| = 2$ cm.

Rješenje.



Neka je P sjecište dužine $\overline{DE}$ i dijagonale $\overline{AC}$. S v_1 označimo duljinu visine trokuta AEP na osnovicu $\overline{AE}$, s v_2 duljinu visine trokuta CDP na osnovicu $\overline{CD}$.

Trokuti AEP i CDP su slični jer imaju iste kutove. (1 bod)

Tada je

$$\frac{v_1}{v_2} = |AE| : |CD| = 1 : 2. \qquad \text{(1 bod)}$$

Također je

$$2 = |AB| = |BC| = v_1 + v_2 = v_1 + 2v_1 = 3v_1$$

pa je $v_1 = \dfrac{2}{3}$ cm. (1 bod)

Slijedi da je površina trokuta AEP jednaka

$$P = \frac{1}{2}|AE| \cdot v_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot v_1 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ cm}^2. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-1.6. Odredite vrijednost realnog parametra a tako da rješenje jednadžbe

$$\frac{2a+x}{2-x}-\frac{2a-x}{2+x}=\frac{4a}{4-x^2}.$$

bude manje ili jednako 1.

Rješenje.

Da bi dana jednadžba imala smisla, treba biti $2-x\neq 0$ i $2+x\neq 0$, odnosno $x\neq \pm 2$.

(1 bod)

Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{2a+x}{2-x}-\frac{2a-x}{2+x}&=\frac{4a}{4-x^2}\\
\frac{2a+x}{2-x}-\frac{2a-x}{2+x}&=\frac{4a}{(2-x)(2+x)} \quad / \cdot (2-x)(2+x)\neq 0\\
(2a+x)(2+x)-(2a-x)(2-x)&=4a\\
4a+2ax+2x+x^2-(4a-2ax-2x+x^2)&=4a\\
4ax+4x&=4a
\end{aligned}$$

(2 boda)

Faktoriziramo lijevu stranu jednakosti i dijelimo uz uvjet $a+1\neq 0$ $(a\neq -1)$

$$\begin{aligned}
4x(a+1)&=4a \;/ : (a+1)\neq 0\\
x&=\frac{a}{a+1}, \quad a\neq -1.
\end{aligned}$$

(1 bod)

Kako x ne smije biti 2 i -2, vrijedi $\frac{a}{a+1}\neq 2$ što povlači $a\neq -2$. (1 bod)

Nadalje, $\frac{a}{a+1}\neq -2$ što povlači $a\neq \frac{-2}{3}$. (1 bod)

Konačno, rješenje dane jednadžbe je $x=\frac{a}{a+1}$ za $a\neq -2,-1,-\frac{2}{3}$. (1 bod)

Treba još vidjeti kada je ono manje ili jednako 1. Rješavamo nejednadžbu

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a+1}&\leq 1\\
\frac{a}{a+1}-1&\leq 0\\
\frac{-1}{a+1}&\leq 0.
\end{aligned}$$

(1 bod)

Posljednja nejednadžba je ekvivalentna nejednadžbi $a+1>0$ čije je rješenje $a>-1$.

(1 bod)

Konačno, rješenje jednadžbe će biti manje ili jednako 1 za $a\in\langle -1,\infty\rangle\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$. (1 bod)

Zadatak B-1.7. Majka je podijelila određeni broj jabuka svojoj djeci. Petar je dobio pola od ukupnog broja jabuka i još dvije. Ivan je dobio pola od preostalog broja jabuka i još dvije. Konačno, Ana je dobila pola od onoga što je ostalo i još dvije jabuke. Na kraju je ostala jedna jabuka. Koliko je jabuka bilo na početku i koliko je jabuka dobilo svako dijete?

Rješenje.

S x označimo početni broj jabuka, a s a, b, c redom označimo broj jabuka koje su dobili Petar, Ivan i Ana.

Petar je dobio

$$a = \frac{x}{2} + 2 \qquad \text{(1 bod)}$$

Znači da je ostalo $x - a = \dfrac{x}{2} - 2$ jabuka. (1 bod)

Ivan je dobio

$$b = \frac{x-a}{2} + 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 2\right) + 2 = \frac{x}{4} + 1 \qquad \text{(1 bod)}$$

jabuka.

Nakon toga je ostalo

$$x - a - b = \frac{x}{2} - 2 - \frac{x}{4} - 1 = \frac{x}{4} - 3 \qquad \text{(1 bod)}$$

jabuka.

Ana je dobila

$$c = \frac{x-a-b}{2} + 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - 3\right) + 2 = \frac{x}{8} + \frac{1}{2} \qquad \text{(1 bod)}$$

jabuka.

Na kraju mora ostati jedna jabuka. Pišemo

$$x - a - b - c = 1.$$

Iz gornjih jednakosti slijedi jednadžba

$$\frac{x}{4} - 3 - \frac{x}{8} - \frac{1}{2} = 1 \qquad \text{(1 bod)}$$

čije je rješenje $x = 36$. Na početku je bilo 36 jabuka. (1 bod)

Petar je dobio $a = 20$ jabuka. (1 bod)

Ivan je dobio $b = 10$ jabuka. (1 bod)

Ana je dobila $c = 5$ jabuka. (1 bod)

Zadatak B-1.8. Opseg pravokutnog trokuta je 14 cm. Nad svakom stranicom konstruiran je kvadrat prema van. Zbroj površina svih kvadrata je 72 cm^2. Kolika je površina danog pravokutnog trokuta?

Rješenje.

Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta. Vrijedi da je

$$\begin{aligned} a+b+c &= 14 \\ a^2+b^2+c^2 &= 72. \end{aligned}$$

(2 boda)

Kako je, prema Pitagorinom poučku, $a^2+b^2=c^2$, posljednja jednakost prelazi u $2c^2=72$ ili $c=6$ cm. (2 boda)

Iz opsega trokuta dobivamo

$$a+b=14-6=8.$$

(1 bod)

Kvadrirat ćemo ovu jednakost i koristiti činjenicu da je površina pravokutnog trokuta $P=\frac{ab}{2}$. Tada je

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= 64 \\ a^2+2ab+b^2 &= 64 \end{aligned}$$

(2 boda)

odnosno

$$\begin{aligned} c^2+4P &= 64 \\ 36+4P &= 64, \end{aligned}$$

(2 boda)

a odatle je $P=7\ \mathrm{cm}^2$. (1 bod)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2011.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1. U kompleksnoj ravnini prikažite skup svih $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$\left|z-(1-i)^4\right| < \left|\sqrt{3}-i\right|^2 .$$

Rješenje. Raspišimo najprije

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{3}-i\right|^2 &= \left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2=4 \\ (1-i)^4 &= \left[(1-i)^2\right]^2=[-2i]^2=-4 \end{aligned}$$

(1 bod)

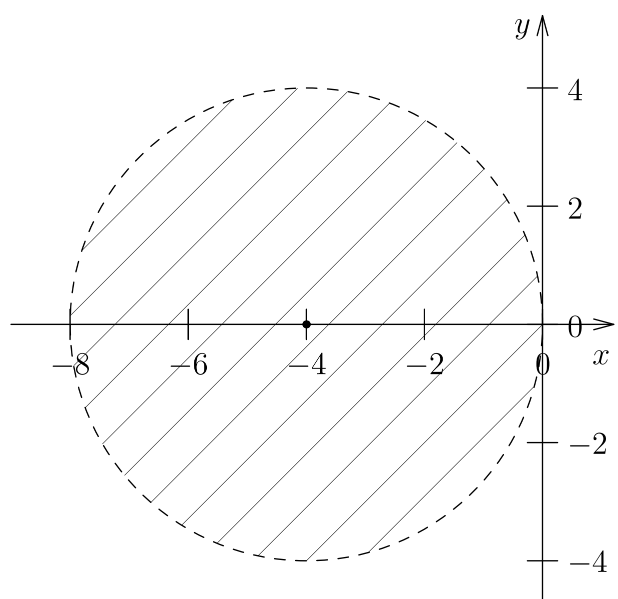
Dakle, tražimo skup svih točaka $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi $|z+4|<4$. Stavimo $z=x+iy$ i uvjet postaje

$$\begin{aligned} |(x+4)+iy| &< 4 \\ \sqrt{(x+4)^2+y^2} &< 4 \\ (x+4)^2+y^2 &< 4^2 \end{aligned}$$

(1 bod)

što određuje (strogu) unutrašnjost kruga sa središtem u točki $(-4,0)$ polumjera 4.

(1 bod)



Skica ... (1 bod)

Napomena. Učenik dobiva sve bodove i ako je iz $|z+4|<4$ odmah nacrtao rješenje uz jasno označeno središte i polumjer.

Zadatak B-2.2. Ako graf kvadratne funkcije $f(x)=x^2-(m-n)x+n$, $m,n\in\mathbb{R}$, ima tjeme u točki $T(2,3)$, odredite vrijednost $f(m-n)$.

Rješenje.

Tjeme grafa kvadratne funkcije f ima x–koordinatu $\dfrac{m-n}{2}$. Tada je $\dfrac{m-n}{2}=2$ pa je

$$m-n=4 \tag{1}$$

(1 bod)

Nadalje, tjeme ima y–koordinatu $\dfrac{4n-(m-n)^2}{4}=3$. Odatle i iz (1) dobije se

$$4n-(m-n)^2=12$$

ili $4n-16=12$, tj. $n=7$. (2 boda)

Tada je $f(m-n)=f(4)=16-16+7=7$. (1 bod)

Zadatak B-2.3. Dokažite da su rješenja jednadžbe

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{x-1}=1$$

realna i različita za sve vrijednosti realnih brojeva a i b za koje vrijedi da je $a\cdot b\neq 0$.

Rješenje. Danu jednadžbu svodimo na jednostavniji oblik.

$$x^2-(a^2+b^2+1)x+a^2=0. \quad \text{(1 bod)}$$

Računamo njezinu diskriminantu:

$$D=(a^2+b^2+1)^2-4a^2=(a^2+b^2+1-2a)(a^2+b^2+1+2a)=\left[(a-1)^2+b^2\right]\cdot\left[(a+1)^2+b^2\right].$$

(2 boda)

Očigledno je $D>0$, za sve realne vrijednosti brojeva a i b, za koje je $a\cdot b\neq 0$. (1 bod)

Zadatak B-2.4. Ako stranice trokuta imaju duljine a, b, c takve da je $a+b-c=2$ i $2ab-c^2=4$, dokažite da je trokut jednakostraničan.

Rješenje.

Iz prve jednakosti dobivamo da je $c=a+b-2$ (*). Tada iz druge jednakosti slijedi

$$\begin{aligned} &2ab-(a+b-2)^2=4 \\ &2ab-a^2-b^2-4-2ab+4a+4b=4 \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Nadalje, prepoznajemo kvadrate binoma:

$$a^2-4a+4+b^2-4b+4=0 \quad \text{ili} \quad (a-2)^2+(b-2)^2=0. \qquad \text{(1 bod)}$$

Ova je jednakost moguća jedino ako su $a-2=0$ i $b-2=0$, što znači da je $a=2$ i $b=2$.

Tada je iz (*), $c=2$. Dakle, trokut je jednakostraničan. (2 boda)

Zadatak B-2.5. Godine oca i njegove dvoje djece (nisu blizanci) su potencije istog prostog broja. Prije godinu dana brojevi godina svakog od njih bili su prosti brojevi. Koliko godina ima otac, a koliko svako od njegove dvoje djece?

Rješenje.

Neka su p^a, p^b, p^c traženi brojevi godina. Tada su brojevi p^a-1, p^b-1, p^c-1 prosti.

(1 bod)

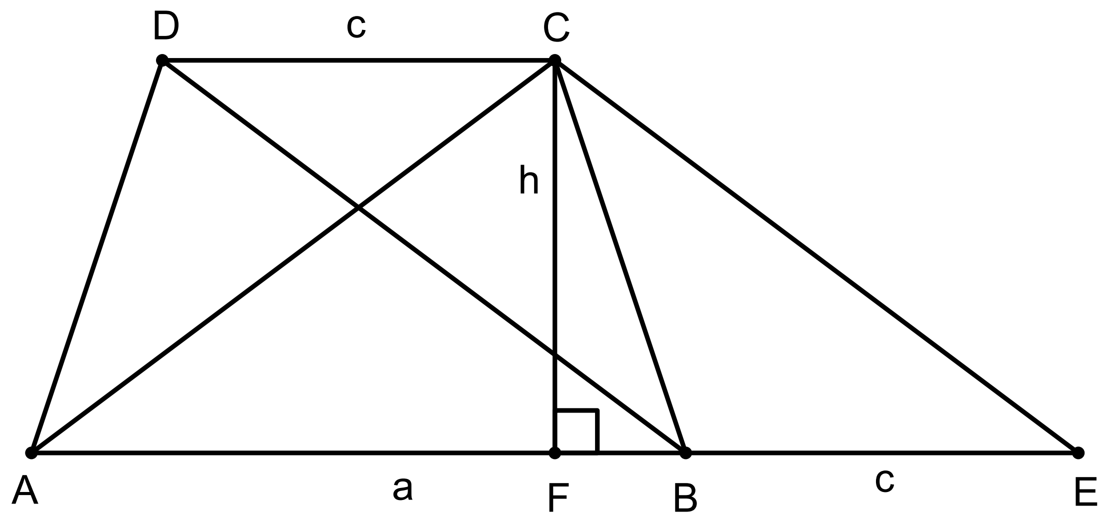
Ako je $p=2$, potencije broja 2 su 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... (1 bod)

Među njima tražimo one kojima kad oduzmemo 1, dobivamo proste brojeve. To su redom brojevi 4, 8 i 32. Teško da netko može biti stariji od 120 godina pa je jedina mogućnost da otac ima 32 godine, a djeca 4 i 8 godina. (1 bod)

Ako je baza $p \geq 3$, brojevi p^a, p^b, p^c su svi neparni, a oni "godinu dana mlađi" svi parni pa ne mogu biti prosti brojevi. To znači da je jedino rješenje 32, 4, 8. (1 bod)

Zadatak B-2.6. Visina jednakokračnog trapeza iznosi h, a površina trapeza je h^2. Pod kojim se kutem sijeku dijagonale trapeza?

Prvo rješenje. Skica ... (1 bod)



Kako je $P = \dfrac{a+c}{2} \cdot h$ i $P = h^2$, to je $a + c = 2h$. (1 bod)

Produžimo $\overline{AB}$ preko točke B do točke E tako da je $|BE| = |DC| = c$. Tada je $BECD$ paralelogram pa je $|CE| = |DB|$. (1 bod)

S druge strane, trapez je jednakokračan pa je $|AC| = |DB|$. Dakle, $|CE| = |AC|$. To znači da je trokut $\triangle AEC$ jednakokračan osnovice $\overline{AE}$. (1 bod)

Tada visina $\overline{CF}$ povučena na osnovicu leži na simetrali osnovice. (1 bod)

Dakle, točka F je polovište dužine $\overline{AE}$. Stoga je

$$|AF| = \frac{1}{2}|AE| = \frac{1}{2}(a+c) = h. \qquad \text{(1 bod)}$$

To znači da je trokut $\triangle AFC$ pravokutan i jednakokračan. (2 boda)

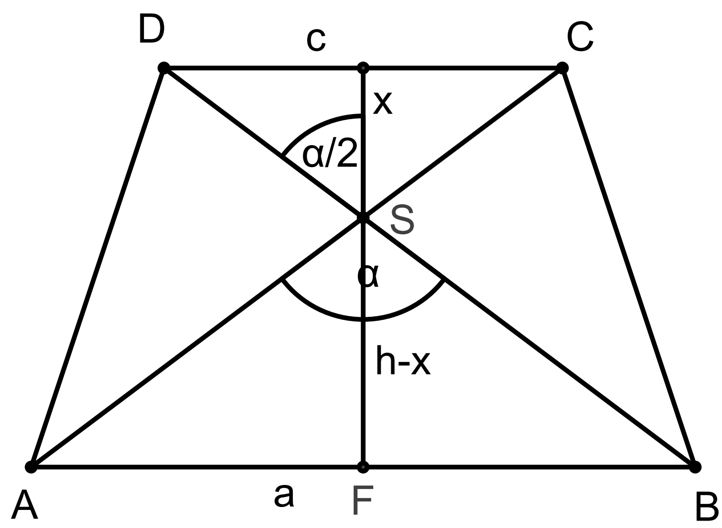
Slijedi da je

$$\angle CAF = \angle FCA = 45°.$$

Kut između dijagonala je tada:

$$\angle ACE = 2\angle FCA = 90° \qquad \text{(2 boda)}$$

Drugo rješenje.



Skica . . . (1 bod)

Iz $\dfrac{a+c}{2} \cdot h = h^2$ slijedi $a + c = 2h$. (1 bod)

Iz sličnosti trokuta ABS i trokuta CDS (isti kutovi jer su osnovice paralelne), gdje je S sjecište dijagonala, slijedi (2 boda)

$$\frac{x}{h-x} = \frac{c}{a}$$
$$xa = hc - cx$$
$$x(a+c) = hc, \qquad \text{(2 boda)}$$

a kako je $a + c = 2h$, slijedi

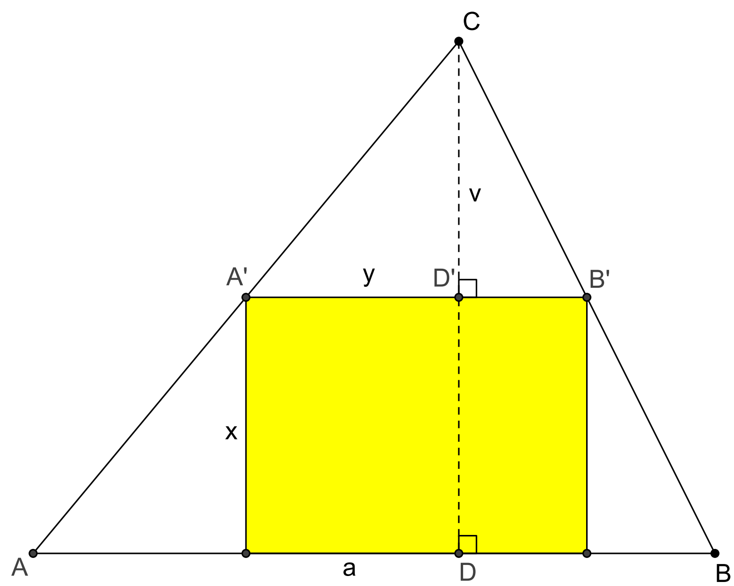
$$x \cdot 2h = hc$$
$$x = \frac{c}{2}. \qquad \text{(2 boda)}$$

a odatle zaključujemo da je

$$\frac{\alpha}{2} = 45^\circ, \quad \alpha = 90^\circ. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-2.7. Ivo je odlučio na zemljištu koje ima oblik raznostraničnog trokuta, osnovice 16 m i visine na tu osnovicu 12 m, sagraditi kuću. Jedan zid kuće treba sagraditi na osnovici trokuta. Obzirom da je zemljište malo, želi ga iskoristiti na najbolji mogući način. Tlocrt kuće treba biti pravokutnik maksimalne površine. Odredite dimenzije i površinu tlocrta kuće.

Rješenje.



Skica ... (1 bod)

Trokuti $\triangle A'B'C$ i $\triangle ABC$ su slični jer su im svi kutovi sukladni. (2 boda)

Tada je

$$\frac{|A'B'|}{|CD'|} = \frac{|AB|}{|CD|}, \qquad (1 \text{ bod})$$

tj.

$$\frac{y}{v-x} = \frac{a}{v} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a}{v}(v-x). \qquad (1 \text{ bod})$$

Vrijedi da je

$$P(x) = xy = x\frac{a}{v}(v-x) = ax - \frac{a}{v}x^2 = 16x - \frac{4}{3}x^2. \qquad (1 \text{ bod})$$

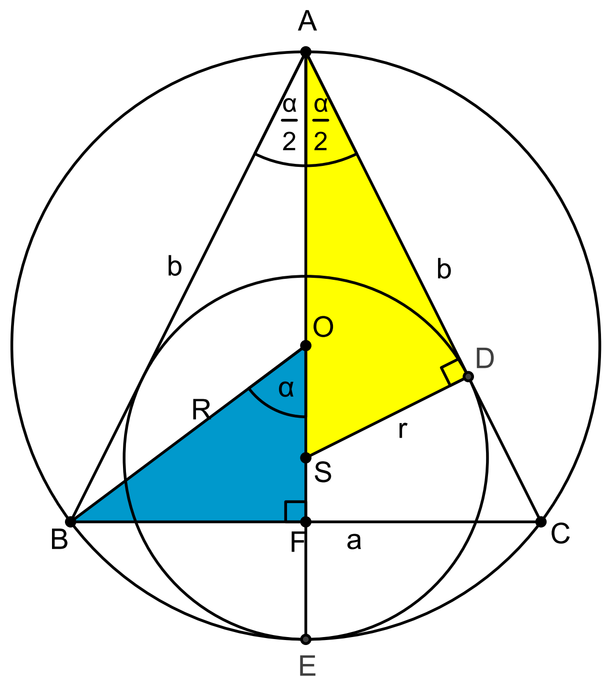
Ova funkcija poprima maksimum za $x = x_0 = -\dfrac{16}{2 \cdot \frac{-4}{3}} = 6$ m. Tada je (2 boda)

$$y = \frac{16}{12}(12-x) = \frac{4}{3}(12-6) = 8 \text{ m}. \qquad (1 \text{ bod})$$

Dakle, širina tlocrta kuće je $x = 6$ m, a duljina $y = 8$ m te površina $P = xy = 48$ m^2. (1 bod)

Zadatak B-2.8. Osnovica $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ABC je duljine a, a kut nasuprot osnovici je α. Kružnica k dodiruje krakove AB i AC i kružnicu opisanu trokutu ABC. Odredite polumjer kružnice k (u ovisnosti o a i α).

Rješenje. Traženi polumjer označimo s r, a polumjer opisane kružnice trokutu ABC s R.



Skica . . . (2 boda)

Polumjer r ćemo izračunati iz pravokutnog trokuta DAS. Vrijedi

$$|AS| = 2R - r, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{2R - r}. \qquad (*)$$

(2 boda)

Polumjer R ćemo izračunati iz pravokutnog trokuta FOB. Kako je α obodni kut nad tetivom $\overline{BC}$, kut FOB je također α (pola središnjeg kuta nad $\overline{BC}$). (1 bod)

Tada je $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$ ili $2R = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. (2 boda)

Tada je iz (*) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r}{\frac{a}{\sin\alpha} - r}$, odnosno

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{a}{\sin\alpha} - r\right) = r$$

$$r + r\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$$

$$r = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}. \qquad \text{(3 boda)}$$

Napomena. Polumjer R se može izračunati i iz pravokutnog trokuta ABE (kut ABE je obodni nad promjerom) ili iz formule za površinu ($P = \frac{abc}{4R}$). Bilo koji način računanja vrijedi 3 boda.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2011.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1. Riješite jednadžbu

$$\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x)=2.$$

Rješenje. Jednadžba ima smisla jedino ako je $1+\cos x>0$, odnosno ako je $\cos x>-1$, a to znači za sve $x\in\mathbb{R}$ osim kada je $\cos x=-1$. (1 bod)

Isto tako baza logaritamske funkcije mora biti pozitivna i različita od 1 pa vrijedi $\sqrt{2}\sin x>0$ i $\sqrt{2}\sin x\neq 1$, odnosno

$$\sin x>0 \quad \text{i} \quad \sin x\neq\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Iz same jednadžbe slijedi

$$\begin{aligned}1+\cos x&=2\sin^2 x\\ 1+\cos x&=2\left(1-\cos^2 x\right)\\ 2\cos^2 x+\cos x-1&=0\end{aligned}$$

te dobivamo $\cos x=\frac{1}{2}$ i $\cos x=-1$. (1 bod)

$\cos x=-1$ nije rješenje zbog početnog uvjeta, a iz $\cos x=\frac{1}{2}$ dobivamo $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ili $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$. Zbog početnog uvjeta rješenje je samo $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$. (1 bod)

Zadatak B-3.2. Odredite sve proste brojeve manje od 2011 kojima je zbroj znamenaka jednak 2.

Rješenje. Prvi prosti broj koji ima zbroj znamenaka 2 je broj 2. Za ostale takve proste brojeve zaključujemo na sljedeći način:

Gledamo zadnju znamenku. Na zadnjem mjestu ne može stajati 2 ili 0 jer bi onda broj bio paran. (1 bod)

Dakle, jedina je mogućnost da broj ima prvu i zadnju znamenku 1, a ostale su 0. To nam daje brojeve 11, 101, 1001. (1 bod)

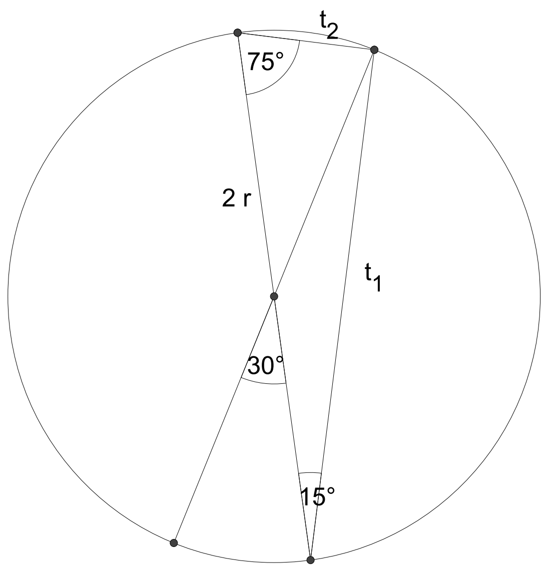
Lako se provjeri da brojevi 11 i 101 jesu prosti. (1 bod)

No, broj 1001 nije prost. Npr. djeljiv je sa 7.

Rješenje su brojevi 2, 11, 101. (1 bod)

Zadatak B-3.3. U krugu su povučena dva promjera koji se sijeku pod kutom od 30°. Krajnje točke tih promjera određuju dvije tetive (različite od promjera) čije se duljine razlikuju za $2\sqrt{2}$. Kolika je površina kruga?

Rješenje. Skica ... (1 bod)



Zadano je $t_1 - t_2 = 2\sqrt{2}$.

Iz $\sin 75^\circ = \dfrac{t_1}{2r}$ dobivamo $t_1 = 2r\sin 75^\circ$, a iz $\sin 15^\circ = \dfrac{t_2}{2r}$ slijedi $t_2 = 2r\sin 15^\circ$. (1 bod)

Uvrstivši dobiveno u zadanu jednakost slijedi

$$r = \frac{\sqrt{2}}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2\cos 45^\circ \sin 30^\circ} = 2.$$

Dakle, $P = 4\pi$. (2 boda)

Zadatak B-3.4. Odredite rješenja nejednadžbe:

$$2011\cos\left(2x^2 - y\right) \geq x^2 + 2011.$$

Rješenje. Iz $x^2 \geq 0$ slijedi $x^2 + 2011 \geq 2011$, a iz $\cos\left(2x^2 - y\right) \leq 1$ slijedi

$$2011\cos\left(2x^2 - y\right) \leq 2011$$ (1 bod)

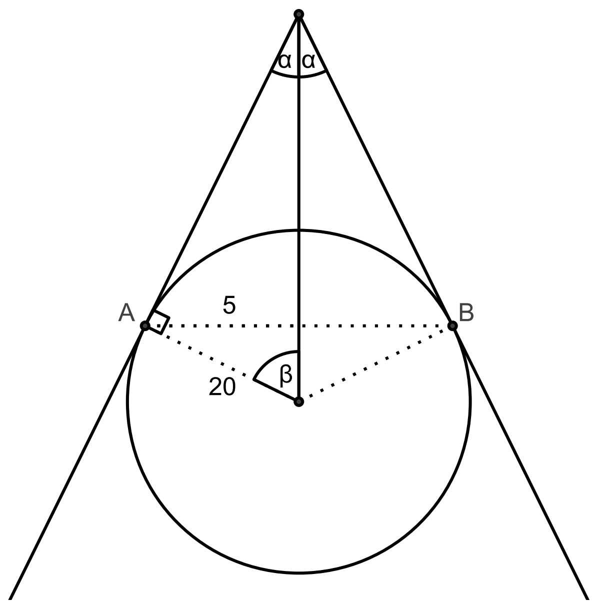
Zaključujemo da je jedino moguće rješenje kada je $2011\cos\left(2x^2 - y\right) = x^2 + 2011 = 2011$, a odatle dobivamo $x^2 = 0$ pa je $x = 0$. (1 bod)

Nadalje, $1 = \cos(-y) = \cos y$ pa je $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (1 bod)

Dakle, rješenje je $\{(0, 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$. (1 bod)

Zadatak B-3.5. Dvije ravnine diraju kuglu u točkama A i B. Ako je polumjer kugle 20 cm i $|AB| = 10$ cm, odredite sinus kuta između tih ravnina.

Rješenje. Skica ... (1 bod)



$$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{5}{20} = \frac{1}{4},$$ (1 bod)

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$ (1 bod)

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = l2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$ (1 bod)

Zadatak B-3.6. U ovisnosti o realnom parametru $a \in \mathbb{R}$, odredite broj rješenja jednadžbe

$$(2\sin x - \cos x)^2 + (\sin x - 2\cos x)^2 = a$$

unutar intervala $[0, \pi\rangle$.

Rješenje. Pojednostavimo danu jednadžbu.

$$4\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x = a \qquad \text{(1 bod)}$$

$$5\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) - a = 4\sin 2x$$

$$\sin 2x = \frac{5-a}{4}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Neka je $t = 2x$. Ako je $x \in [0, \pi\rangle$, tada je $t \in [0, 2\pi\rangle$. Tada tražimo broj rješenja jednadžbe

$$\sin t = \frac{5-a}{4} \qquad (*)$$

unutar intervala $[0, 2\pi\rangle$.

Kako je $|\sin t| \leq 1$ za sve $t \in \mathbb{R}$, vrijedi: (1 bod)

1) Za $\left|\frac{5-a}{4}\right| > 1$, odnosno za $a < 1$ ili $a > 9$, jednadžba (*) nema rješenja. (2 boda)

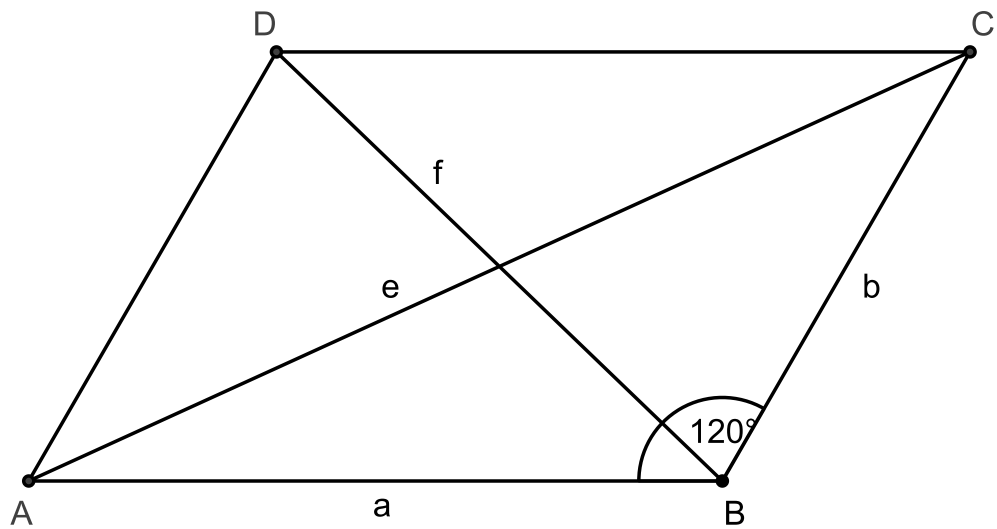
2) Za $\left|\frac{5-a}{4}\right| = 1$, odnosno za $a = 1$ ili $a = 9$, jednadžba (*) ima jedno rješenje unutar $[0, 2\pi\rangle$. (2 boda)

3) Za $\left|\frac{5-a}{4}\right| < 1$, odnosno za $1 < a < 9$, jednadžba (*) ima dva rješenja u $[0, 2\pi\rangle$.

(2 boda)

Zadatak B-3.7. U paralelogramu tupi kut iznosi $120°$, a duljine dijagonala su u omjeru $\sqrt{109} : \sqrt{39}$. U kojem su omjeru duljine stranica?

Rješenje.



Iz danih podataka i kosinusovog poučka slijedi

$$\frac{e^2}{f^2} = \frac{a^2+b^2-2ab\cos 120°}{a^2+b^2-2ab\cos 60°}$$

$$\frac{109}{39} = \frac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2-ab}.$$ (3 boda)

Odatle nakon sređivanja slijedi

$$35a^2 - 74ab + 35b^2 = 0. \qquad (*)$$

(2 boda)

Tada rastavljanjem na faktore dobivamo

$$35a^2 - 35ab - 49ab + 35b^2 = 0$$
$$5a(7a-5b) - 7b(7a-5b) = 0$$
$$(7a-5b)(5a-7b) = 0.$$ (2 boda)

Slijedi da je $7a - 5b = 0$ ili $5a - 7b = 0$, odnosno (1 bod)

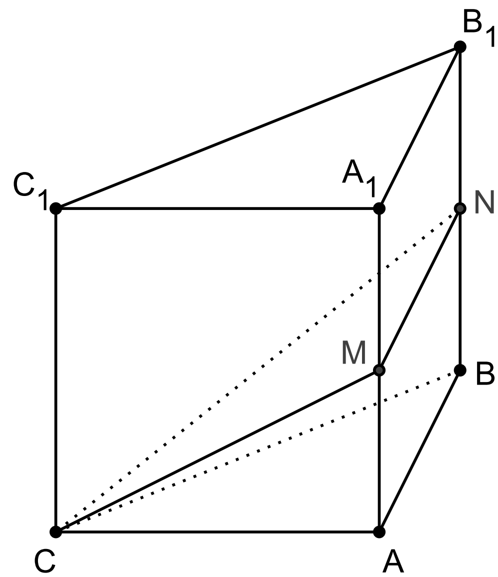
$$\frac{a}{b} = \frac{5}{7} \quad \text{ili} \quad \frac{a}{b} = \frac{7}{5}.$$ (2 boda)

Napomena: Jednadžba (*) se može riješiti kao kvadratna po a ili b, a može se i podijeliti s b^2 te se dobije kvadratna jednadžba po $\frac{a}{b}$:

$$35\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 74\cdot\frac{a}{b} + 35 = 0.$$

Zadatak B-3.8. Duljine bridova baze uspravne trostrane prizme su 6 cm, 8 cm i $4\sqrt{6}$ cm. Kroz vrh najvećeg kuta baze postavljena je ravnina tako da presjek prizme i ravnine bude jednakostraničan trokut. Izračunajte površinu tog presjeka.

Rješenje.



Neka je $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|AB| = 4\sqrt{6}$ cm, $|AM| = x$ cm, $|BN| = y$ cm.
Pošto je $|MC| = |NC| = |MN|$, tada je

$$x^2 + 36 = y^2 + 64 = (y - x)^2 + 96 \qquad \text{(1 bod)}$$

pa dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 28 \\ 2xy - x^2 = 32. \end{cases} \qquad \text{(2 boda)}$$

Supstitucijom $\dfrac{y}{x} = z$ dobivamo

$$\begin{cases} x^2 - x^2z^2 = 28 \\ 2x^2z - x^2 = 32. \end{cases} \qquad \text{(1 bod)}$$

Dijeljenjem dobivamo

$$\frac{1 - z^2}{2z - 1} = \frac{7}{8}, \qquad \text{(1 bod)}$$

odnosno $8z^2 + 14z - 15 = 0$ pa je $z_1 = \dfrac{3}{4}$ i $z_2 = -\dfrac{5}{2}$. (1 bod)

Pošto je $x > 0$ i $y > 0$, tada je $z = \dfrac{y}{x} > 0$.

Dakle, za $z = \dfrac{3}{4}$ imamo

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ x^2 - y^2 = 28. \end{cases}$$ (1 bod)

Pozitivna rješenja su $x = 8$ cm, $y = 6$ cm. (1 bod)

Iz trokuta AMC imamo $|CM|^2 = 36 + 64$ ili $|CM| = 10$ cm pa je $P = 25\sqrt{3}$ cm^2.

(2 boda)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2011.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1. Riješite jednadžbu:

$$2^{\binom{n+1}{2}} - 4 \cdot 2^{\binom{n-1}{2}} = 7 \cdot 2^{\binom{n}{2}}.$$

Rješenje. Jednadžbu rješavamo uz uvjet da je $n \geq 3$.

$$2^{\frac{(n+1)n}{2}} - 4 \cdot 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} = 7 \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Nakon dijeljenja jednadžbe s $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ dobivamo

$$2^{\frac{(n+1)n}{2} - \frac{n(n-1)}{2}} - 4 \cdot 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}} = 7$$

odnosno

$$2^n - 4 \cdot 2^{-n+1} = 7. \qquad \text{(1 bod)}$$

Stavimo li $2^n = t$ dobivamo jednadžbu $t^2 - 7t - 8 = 0$ čija su rješenja 8 i -1. (1 bod)

Kako je $2^n > 0$, $2^n = 8$ pa je rješenje $n = 3$. (1 bod)

Zadatak B-4.2. Pravokutna ploča dimenzije 10×9 podijeljena je mrežom horizontalnih i vertikalnih pravaca na kvadrate duljine stranice 1. Koliko na ovoj ploči ima ukupno kvadrata?

Rješenje. Prebrojimo redom kvadrate 1×1, zatim 2×2, 3×3, 4×4, 5×5, 6×6, 7×7, 8×8, 9×9.

Kvadrata dimenzije	1×1	ima	$10 \cdot 9 = 90.$
Nadalje, kvadrata	2×2	ima	$9 \cdot 8 = 72.$
	3×3	ima	$8 \cdot 7 = 56.$
	4×4	ima	$7 \cdot 6 = 42.$
	5×5	ima	$6 \cdot 5 = 30.$
	6×6	ima	$5 \cdot 4 = 20.$
	7×7	ima	$4 \cdot 3 = 12.$
	8×8	ima	$3 \cdot 2 = 6.$
	9×9	ima	$2 \cdot 1 = 2.$

(3 boda)

Ukupno ima $2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 + 72 + 90 = 330$ kvadrata. (1 bod)

Zadatak B-4.3. Odredite $a \in \mathbb{C}$ tako da broj $z_0 = -\sqrt{3} + i$ bude nultočka polinoma $P(z) = z^{15} - a$. Od preostalih nultočaka polinoma P odredite onu čiji je argument najmanji.

Rješenje. Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja $z_0 = -\sqrt{3} + i$ je

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Tada je

$$z_0^{15} = 2^{15}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^{15}i. \qquad \text{(1 bod)}$$

Slijedi $P(z_0) = z_0^{15} - a = 0$. Dakle, $a = z_0^{15} = 2^{15}i$. (1 bod)

Nultočke polinoma P su svi petnaesti korijeni iz broja $a = 2^{15}i = 2^{15}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. To su brojevi

$$w_k = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{15} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{15}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, 14. \qquad \text{(1 bod)}$$

Najmanji argument ima broj $w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{30} + i\sin\frac{\pi}{30}\right)$. (1 bod)

Zadatak B-4.4. Od pet brojeva prva tri čine aritmetički niz s razlikom 8, a posljednja četiri čine geometrijski niz s kvocijentom 2. O kojim se brojevima radi?

Rješenje.

$$\rlap{$\underbrace{}_{\text{aritmetički niz}}$}a,\quad \overbrace{b,\quad c,\quad d,\quad e}^{\text{geometrijski niz}}$$

Aritmetički dio niza možemo označiti sa $x-16$, $x-8$, x. Geometrijski dio niza označimo sa $x-8$, $2(x-8)$, $4(x-8)$, $8(x-8)$. (2 boda)

Slijedi da je $x = 2(x-8)$ pa je $x = 16$. (1 bod)

Traženi brojevi su 0, 8, 16, 32, 64. (1 bod)

Zadatak B-4.5. Povučemo li tangentu t_1 na elipsu $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ pod kutom od 45° prema pozitivnom smjeru osi x, njezin odsječak na y osi je 4. Povučemo li tangentu t_2 pod kutom od 60°, odsječak na y osi povećati će se za 2. Odredite površinu četverokuta $F_1T_1F_2T_2$, gdje su F_1, F_2 žarišta elipse, a T_1, T_2 redom sjecišta tangenti t_1, t_2 s y osi.

Rješenje. Napišimo jednadžbe danih tangenti:

$$t_1 \ldots k_1 = \operatorname{tg} 45^\circ = 1,\ l_2 = 4, \qquad t_2 \ldots k_2 = \sqrt{3},\ l_2 = 6$$

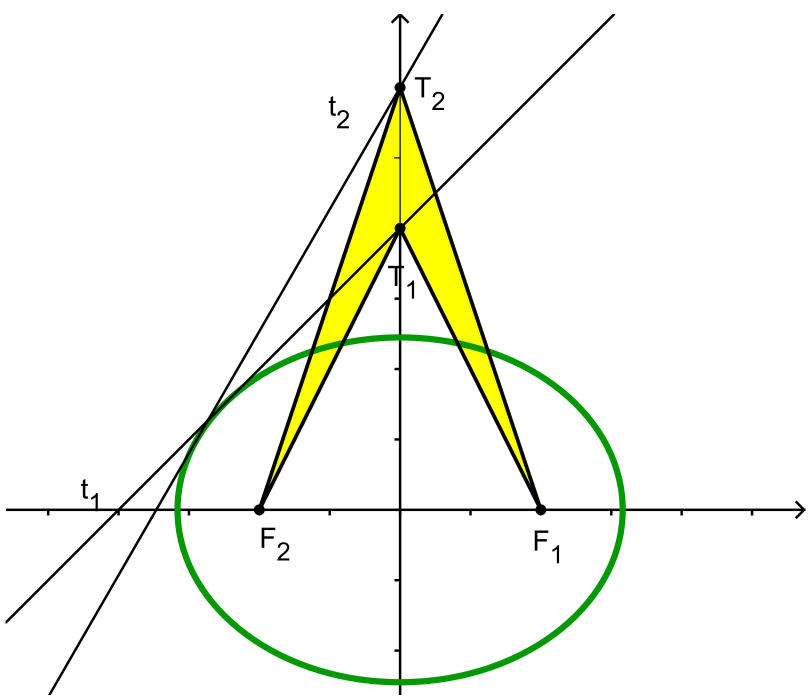
$$t_1 \ldots y = x + 4$$
$$t_2 \ldots y = \sqrt{3}x + 6. \qquad \text{(1 bod)}$$

Iz uvjeta dodira $a^2k^2 + b^2 = l^2$ slijedi $a^2 + b^2 = 16$ i $3a^2 + b^2 = 36$, odnosno $a^2 = 10$, $b^2 = 6$. (1 bod)

Tada je $e^2 = 10 - 6 = 4$, a koordinate fokusa su $F_1 = (2,0)$, $F_2 = (-2,0)$. (1 bod)

Kako su $T_1 = (0,4)$, $T_2 = (0,6)$, tražena površina je

$$P = 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 6}{2} - \frac{2 \cdot 4}{2} \right) = 4. \qquad \text{(1 bod)}$$



Zadatak B-4.6. Odredite umnožak rješenja jednadžbe

$$x^{\log_{2011} x} \cdot \sqrt{2011} = x^{2011}.$$

Rješenje. Logaritmiramo po bazi 2011:

$$\begin{aligned} x^{\log_{2011} x} \cdot \sqrt{2011} &= x^{2011} \\ \log_{2011} x \cdot \log_{2011} x + \log_{2011} \sqrt{2011} &= \log_{2011} x^{2011} \\ \log_{2011}^2 x + \frac{1}{2} &= 2011 \cdot \log_{2011} x \end{aligned}$$

(5 bodova)

Jednadžba ima smisla samo za $x > 0$.

Uvedimo zamjenu $\log_{2011} x = a$ i dobivamo

$$a^2 - 2011a + \frac{1}{2} = 0.$$

(1 bod)

Rješenja ove jednadžbe zadovoljavaju Vieteove formule te je:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 2001 \\ \log_{2011} x = a_1 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 2011^{a_1} \\ \log_{2011} x = a_2 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 2011^{a_2} \end{aligned}$$

(3 boda)

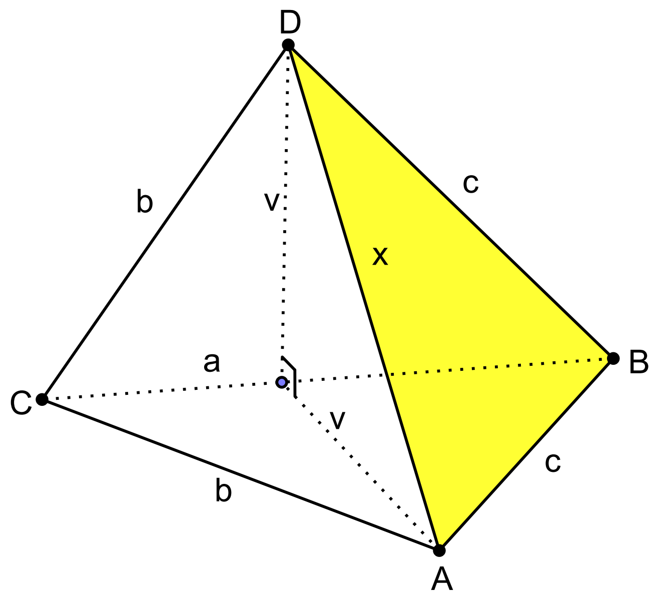
Slijedi da je

$$x_1 \cdot x_2 = 2011^{a_1} \cdot 2011^{a_2} = 2011^{a_1+a_2} = 2011^{2011}.$$

(1 bod)

Zadatak B-4.7. Baza trostrane piramide je trokut sa stranicama a, b i c. Duljina stranice c iznosi 7 cm, $a - b = 5$ cm, a kut nasuprot stranice c, $\gamma = 60°$. Pobočka koja sadrži najdulji osnovni brid okomita je na ravninu baze i sukladna bazi. Izračunajte obujam piramide i površinu najveće pobočke piramide.

Rješenje.



Koristeći kosinusov poučak izračunat ćemo duljine stranica a i b.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

$$49 = (b+5)^2 + b^2 - 2(b+5)b \cdot \frac{1}{2} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$b^2 + 5b - 24 = 0$$

$$b = 3 \text{ cm}, \quad a = 8 \text{ cm}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Kako je pobočka CBD sukladna bazi i okomita na nju, visina piramide jednaka je visini baze i vrijedi

$$\sin\gamma = \frac{v}{b} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Površina baze je $B = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$. (1 bod)

Tada je obujam piramide

$$V = \frac{6\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = 9 \text{ cm}^3. \qquad \text{(1 bod)}$$

Površina pobočke CBD jednaka je površini baze. Kako je duljina stranice b manja od duljine stranice c, pobočka ABD je veća od pobočke CAD pa ćemo računati njezinu površinu. (1 bod)

Izračunajmo duljinu nepoznatog brida x:

$$x = v\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \text{ cm}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Duljina visine pobočke ABD iznosi

$$y=\sqrt{c^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{730}}{4} \qquad \text{(1 bod)}$$

i njezina je površina

$$P=\frac{y\cdot x}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{730}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{2}=\frac{3}{16}\cdot\sqrt{4380}=\frac{3}{8}\cdot\sqrt{1095}\ \mathrm{cm}^2. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-4.8. Odredite zbroj recipročnih vrijednosti svih pozitivnih djelitelja broja n, uključujući 1 i n, ako je $n=2^{p-1}(2^p-1)$, a 2^p-1 je prost broj.

Rješenje. Djelitelji broja n su redom brojevi

$$1,2,2^2,2^3,\ldots,2^{p-1},2^p-1,2\cdot\left(2^p-1\right),2^2\cdot\left(2^p-1\right),\ldots,2^{p-1}\cdot\left(2^p-1\right). \qquad \text{(4 boda)}$$

Zbroj njihovih recipročnih vrijednosti je

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{2^p-1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{p-1}}\right). \qquad \text{(2 boda)}$$

Uočavamo geometrijski niz od p članova s prvim članom 1 i kvocijentom $\frac{1}{2}$. Tada je

$$S=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2^p-1}\right)=2\left(1-2^{-p}\right)\left(\frac{2^p}{2^p-1}\right)=2\left(\frac{2^p-1}{2^p-1}\right)=2. \qquad \text{(4 boda)}$$